ROYAUME DU MAROC

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA FORMATION PROFESSINNELLE

RAPPORT D'AGREGATION DE MATHEMATIQUES

SESSION 2016

COMPOSITION DU JURY

OUKNINE Youssef	Président du jury - Professeur de l'Enseignement Supérieur, Faculté des Sciences Semlalia ; Université Cadi Ayyad
DIYER Okacha	Vice Président - Professeur agrégé de mathématiques, chargé d'inspection en CPGE ; CNIPE –Rabat
OUASSOU Idir	Vice Président - Professeur de l'Enseignement Supérieur, Ecole Nationale des Sciences Appliquées ; Université Cadi Ayyad
AZIZI Abdelmalek	Professeur de l'Enseignement Supérieur, Faculté des Sciences ; Université Mohamed Premier
BEDAA Abdelouahab	Professeur de l'enseignement Supérieur CFIE – Rabat
BERRAHO Mohammed	Professeur agrégé de mathématiques, chargé d'inspection en CPGE ; CNIPE –Rabat
CHEBCHI Allal	Professeur agrégé de mathématiques, CPGE Ibn Taymia –Marrakech
EL FALLAH Omar	Professeur de l'Enseignement Supérieur, Faculté des Sciences ; Université Mohamed V Rabat
EL KAHOUI M'hammed	Professeur de l'Enseignement Supérieur, Faculté des Sciences Semlalia ; Université Cadi Ayyad
ERRAOUI Mohamed	Professeur de l'Enseignement Supérieur, Faculté des Sciences Semlalia ; Université Cadi Ayyad
MAAROUF Hamid	Professeur Assistant, Faculté Polydisciplinaire de Safi ; Université Cadi Ayyad
NASROALLAH Abdelaziz	Professeur de l'Enseignement Supérieur, Faculté des Sciences Semlalia ; Université Cadi Ayyad
SADIK Brahim	Professeur de l'Enseignement Supérieur, Faculté des Sciences Semlalia ; Université Cadi Ayyad
ROUX Daniel	Maître de Conférences, chargé d'une mission d'enseignement en classes préparatoires ; lycée Descartes à Rabat.
TAIBI Mimoun	Professeur agrég, Classes préparatoires 2ème année MP ; Rabat

AGREGATION DE MATHEMATIQUES MAROCAINE SESSION 2016

RAPPORT DU JURY PRÉSENTÉ PAR :
Professeur Ouknine Youssef : Président du jury
Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
e–mail: ouknine@uca.ma

Table des Matières

Chapitre 1

Composition du jury

1.1 Directoire

Ouknine Youssef	Professeur de l'Enseignement Supérieur	Marrakech
Ouassou Idir	Professeur de l'Enseignement Supérieur	Marrakech
Oukacha Diyer	Professeur agrégé de mathématiques	Rabat

1.2 Jury

1.2.1 Analyse et Probabilités

1. Berrahou Mohamed
2. El Fallah Omar
3. Erraoui Mohamed
4. Taibi Mimoune

1.2.2 Algèbre et Géométrie

1. Azizi Abdelmalek
2. Badaa Abdelouahab
3. Chebchi Allal
4. Sadik Brahim

1.2.3 Modélisation et Calcul Scientifique

1. El Kahoui M'hamed
2. Maarouf Hamid
3. Nasroallah Abdelaziz
4. Roux Daniel

Chapitre 2

Introduction

La session 2016 du concours d'agrégation de mathématiques a été caractérisée par la nomination d'un nouveau président du jury ainsi que l'enrichissement des différents comités du jury par de nouveaux membres. C'est aussi la deuxième session ouverte aux agrégatifs de la deuxième année du cycle de préparation à l'agrégation instaurée aux C.R.M.E.F du Royaume. Ce cycle de formation dure deux ans et est ouvert, après concours, aux étudiants titulaires d'un master et aux ingénieurs d'Etat ainsi qu'aux professeurs de second cycle titulaires d'une licence avec trois années d'ancienneté. D'autre part, cette session fait suite à la réforme de l'épreuve de Modélisation et Calcul Scientifique depuis l'année 2015. L'année 2016 est considérée comme la deuxième année de transition pendant laquelle nous avons fait cohabiter textes et leçons : Contrairement à leurs prédécesseurs, les candidats qui ont subi les épreuves orales du concours ont été confrontés à une nouvelle épreuve de modélisation qui comprenait deux éléments, à savoir le choix d'une leçon, dans la pure tradition du concours ou le choix d'un texte.

Au terme de la préparation, les candidats subissent à Rabat, comme leurs pairs en France, les mêmes épreuves de l'écrit, sous la présidence d'un jury français et en présence de représentants marocains. Les épreuves sont envoyées en France pour correction. Le président du jury marocain s'associe au jury qui se réunit en France pour procéder au déchiffrage des résultats et à la déclaration des candidats admissibles. Ensuite, les candidats retenus doivent passer l'oral devant un jury marocain, à qui revient le dernier mot en ce qui concerne l'admission. L'année universitaire 2015-2016 a été marquée par le fait qu'il y avait des candidats ingénieurs d'état parmi les candidats officiels.

La session 2016 du concours de l'agrégation de mathématiques marocaine s'est caractérisée par le même nombre de postes offerts par rapport à la session précédente : 20 postes. Une très nette diminution du nombre des inscrits au concours en 2016 par rapport à 2015 :

- le nombre de candidats inscrits était de 60 (contre 99 en 2015), ce qui correspond à une diminution d'environ 39 %
- le nombre de candidats ayant composé aux deux épreuves écrites d'agrégation était de 47,
- 25 candidats ont été déclarés admissibles (contre 16 en 2015) et leur moyenne était de 9,3/20 (contre 07,55/20 en 2015), le dernier admissible ayant 5,75/20 (contre 5,25/20 en 2015).
- 17 candidats ont été déclarés admis et leur moyenne était de 10,33/20 (contre 10,28/20 en 2015).

Ce rapport du jury se veut formatif, son l'objectif est d'aider les candidats à préparer les examens de la session 2017. Nous espérons que les conseils apportés dans ce rapport permettront aux futurs candidats de se préparer comme il se doit à cette épreuve.
En ce qui concerne le déroulement du concours, je tiens à remercier vivement l'ensemble de mes collègues membres du jury, le directeur du CRMEF de Rabat au sein duquel se tenaient les oraux, et qui, depuis le début des épreuves orales, n'a ménagé aucun effort pour la réussite de ce concours .
Je voudrais, également, remercier l'Unité Centrale de la Formation des Cadres pour le soutien morale et matériel. Léquipe n'a épargné aucun effort pour la réussite de ce concours.

Chapitre 3

Déroulement du concours et statistiques

3.1 Déroulement de la session 2016

Les épreuves écrites se sont déroulées selon le calendrier suivant :

- Epreuve écrite de mathématiques générale (durée : 6 heures): mercredi 11 mars 2016 (voir l'Annexe)
- Epreuve écrite d'analyse et de probabilité (durée : 6 heures) : jeudi 12 mars 2016. (voir l'Annexe))

Les délibérations pour l'admissibilité (pour tous les candidats français et marocains) ont eu lieu le 23 mai 2016 au lycée Jean-Pierre Vernant, 21 rue du docteur Gabriel Ledermann, à Sèvres sous la présidence du jury de l'agrégation externe de mathématiques, Monsieur Charles Torossian et en présence du président du jury de l'agrégation marocaine de mathématiques , Monsieur Youssef Ouknine.

Les épreuves orales se sont déroulées selon le programme suivant :

Les oraux de l'agrégation sont constitués de trois épreuves :

- Analyse et probabilités ;
- Algèbre et géométrie ;
- Modélisation et calcul scientifique

Dimanche 12 juin 2016 à partir de 13h30 au CRMEF, Rabat

- 14h : Préparation des couplages et mise sous enveloppes et élaboration du planning de préparation et de passage des candidats par épreuve ;
- 15h30 : Réunion d'accueil présidée par Y. Ouknine, président du jury ;
- 16h : Tirage au sort de l'ordre de passage des candidats ;
- 16h30 : Tirage au sort, par les candidats, des enveloppes contenant les sujets des différentes épreuves ;
- 17h30 : Inspection de la bibliothèque et de la salle d'informatique, et contrôles des ouvrages apportés par les candidats, par les membres du jury.

Du Lundi 13 au jeudi 16 juin 2016 : Déroulement des épreuves orales ;

Jeudi 16 juin 2016 de 19h à 20h : délibérations et proclamation des résultats.

Remarque 3.1.1

- *Il est rappelé que pendant la préparation, le candidat peut utiliser les ouvrages qui se trouvent sur place à la bibliothèque du CPAM. Il peut également utiliser les ouvrages de référence qu'il peut lui même apporter. Ces ouvrages ne doivent pas comporter de notes manuscrites et doivent être remis à l'administration, au plus tard le 10 juin 2016 à 12h, afin que le jury puisse les contrôler avant d'autoriser leur utilisation. Ainsi, après enregistrement, ils seront mis à la disposition de tous les candidats.*
- *la saisie des notes se fera au fur et à mesure du déroulement des épreuves.*

3.2 Résultats généraux

Candidats marocains inscrits pour les épreuves écrites	60
Postes mis au concours	20
Candidats marocains présents à toutes les épreuves écrites	47
Candidats admissibles	25
Candidats admis	17

Tableau 1 - Résultats généraux de la session 2016

Classes préparatoires :

Candidats admis et proposés par le jury pour effectuer un stage probatoire en CPGE

Nom	Pré nom	Date de naissance	Rang	Décision du jury
OULGHAZI	OMAR	19/10/89	1	Admis
MOUNTASSIR	MOHAMED	09/02/80	2	Admis
ET-TAHRI	FOUAD	26/12/90	3	Admis
KARKOURI	BADRE	29/09/89	4	Admis
EL HOR	MOULAY LHOUSSINE	01/01/74	5	Admis
EL ASRI	MOHAMED	01/01/83	6	Admis
FTOUHI	MOSTAFA	06/12/86	7	Admis
NASSIRDINE	AHMED	06/03/77	8	Admis
ABOUSALIM	HAMID	24/07/75	9	Admis
ELKAF	MARIEM	14/03/91	10	Admis
ESSAIDI	YOUSSEF	14/12/85	11	Admis
NAJM-EDDINE	KHALID	10/12/71	12	Admis
AIT LAARIF	MOUAD	20/06/90	13	Admis
BOUTRIQ	KHALID	22/06/73	14	Admis
DEBLIJ	AHMED	04/09/82	15	Admis
ELOMAIRY	EL HASSANE	01/01/75	16	Admis
HAMDANE	MOHAMMED	27/05/75	17	Admis

Chapitre 4

Sommaires sur les notes obtenues

4.1 Répartition des notes des épreuves écrites

Nous adoptons les abréviations suivantes :

- AG : Algèbre et Géométrie
- AP : Analyse et Probabilité
- MCS : Modélisation et Calcul Scientifique

4.1.1 Répartition des admissibles selon le sexe

Parmi les admissibles on trouve :

Sexe	Nombre	Pourcentage
Femme	01	4%
Hommes	24	96%

Répartition des admissibles selon le sexe

4.1.2 Répartition des admissibles selon l'âge

Les caractéristiques descriptives de la variable âge sont résumées dans le tableau suivant :

Nombre	Minimum	Maximum	Moyenne	Ecart type
25	25	49	34,6	7,47

Les caractéristiques descriptives de la variable âge

La répartition des admissibles selon l'âge est présentée dans le tableau suivant :

Age	Effectif	Pourcentage
25	1	4%
26	4	16%
27	2	8%
28	1	4%
29	1	4%
30	2	8%
31	1	4%
33	1	4%
34	1	4%
36	1	4%
39	1	4%
41	3	12%
42	2	8%
43	1	4%
45	1	4%
48	1	4%
49	1	4%

Répartition des admissibles selon leur âge

4.1.3 Répartition des notes des épreuves écrites

On donne ci-dessous et pour chaque épreuve écrite la suite par ordre décroissant des notes obtenues par les candidats marocains admissibles.

Nom	Prenoms	MG (notes sur 20)	AP (notes sur 20)
OULGHAZI	OMAR	17.25	18.25
ET-TAHRI	FOUAD	16.75	13
FTOUHI	MOSTAFA	12	11.75
MOUNTASSIR	MOHAMED	12	11.75
EL HOR	MOULAY LHOUSSINE	12.25	10.75
KARKOURI	BADRE	10	12.25
NASSIRDINE	AHMED	11.5	10.25
ELOMAIRY	EL HASSANE	9.25	11
DEBLIJ	AHMED	9.5	10.5
ABOUSALIM	HAMID	8.5	9.75
NAJM-EDDINE	KHALID	10.75	7
EL ASRI	MOHAMED	8.5	9
ELKAF	MARIEM	8.25	9
SEMMOURI	ABDELLATIF	8	9
AIT LAARIF	MOUAD	11.75	4.75
AFIF	MOHAMMED	9.75	6.25
ESSAIDI	YOUSSEF	7	9
ELAZRI	ABDENBI	5.5	10.25
BOUTRIQ	KHALID	8	7.5
HAKMAOUI	HAMID	8.75	6.5
SAADI	FAOUAZ	9	5.75
OUBOUHOU	SAID	7.75	5.5
HAMDANE	MOHAMMED	7.75	4.75
SALHI	ABDELMAJID	8.5	3
BENADDI	HAFID	7.25	3.25
SABIR	ABDELILAH	5	4.75
MAKHZER	ABDELKRIM	4.25	5.5
WASQI	ABDELJALIL	5.25	4.5
ES-SELLAMI	DRISS	3.5	5.75
BOUDJAJ	LOUBNA	4	5.25
BOUDJAJ	AZZEDDINE	5.5	3.75
HAFIDI	NOUFISSA	4.75	4
LAARICHI	YASSINE	5	3
OUTRGUA	AHMED	2.5	4
BENAZZOU	SALMA	3.25	2.25
MARZOUKI	AHMED	2.25	3
HAMAMOU	ABDELAZIZ	2.5	2.25
LAABASSI	YOUSSOUF	3.75	1
MOHIB	KHADIJA	3.5	1.25
BARMAKI	MOHAMMED	3.25	1.5
ALOUI	AMAL	2.25	1
BOUSHABA	TAOUFIK	AB	2
LAMGHARI	REDOUANE	AB	1.75
HAZIME	MOHAMED AMINE	0.5	1.25
FARHAT	KARIM	1	0.75
EL KARIMI	HAFID	0.25	1

Répartition des notes des épreuves écrites

Le jury de l'agrégation française de mathématiques avait fixé pour tous les candidats la barre d'admissibilité à 41/160.

Répartition du classement par ordre décroissant des étudiants marocains admissibles sur 1969 candidats:

Nom	Prenoms	Total	Rang	Decision
OULGHAZI	OMAR	35.5	12	D
ET-TAHRI	FOUAD	29.75	57	D
FTOUHI	MOSTAFA	23.75	117	D
MOUNTASSIR	MOHAMED	23.75	117	D
EL HOR	MOULAY LHOUSSINE	23	137	D
KARKOURI	BADRE	22.25	161	D
NASSIRDINE	AHMED	21.75	173	D
ELOMAIRY	EL HASSANE	20.25	222	D
DEBLIJ	AHMED	20	227	D
ABOUSALIM	HAMID	18.25	295	D
NAJM-EDDINE	KHALID	17.75	314	D
EL ASRI	MOHAMED	17.5	330	D
ELKAF	MARIEM	17.25	340	D
SEMMOURI	ABDELLATIF	17	350	D
AIT LAARIF	MOUAD	16.5	386	D
AFIF	MOHAMMED	16	420	D
ESSAIDI	YOUSSEF	16	420	D
ELAZRI	ABDENBI	15.75	435	D
BOUTRIQ	KHALID	15.5	455	D
HAKMAOUI	HAMID	15.25	470	D
SAADI	FAOUAZ	14.75	505	D
OUBOUHOU	SAID	13.25	610	D
HAMDANE	MOHAMMED	12.5	685	D
SALHI	ABDELMAJID	11.5	761	D
BENADDI	HAFID	10.5	852	D
SABIR	ABDELILAH	9.75	931	R
MAKHZER	ABDELKRIM	9.75	931	R
WASQI	ABDELJALIL	9.75	931	R
ES-SELLAMI	DRISS	9.25	979	R
BOUDJAJ	LOUBNA	9.25	979	R
BOUDJAJ	AZZEDDINE	9.25	979	R
HAFIDI	NOUFISSA	8.75	1041	R
LAARICHI	YASSINE	8	1131	R
OUTRGUA	AHMED	6.5	1308	R
BENAZZOU	SALMA	5.5	1424	R
MARZOUKI	AHMED	5.25	1452	R
HAMAMOU	ABDELAZIZ	4.75	1514	R
LAABASSI	YOUSSOUF	4.75	1514	R
MOHIB	KHADIJA	4.75	1514	R
BARMAKI	MOHAMMED	4.75	1514	R
ALOUI	AMAL	3.25	1721	R
BOUSHABA	TAOUFIK	0	1865	X
LAMGHARI	REDOUANE	0	1885	X
HAZIME	MOHAMED	1.75	1885	R
FARHAT	KARIM	1.75	1885	R
EL KARIMI	HAFID	1.25	1937	R

On présente ci-dessous les caractéristiques descriptives de chaque épreuve écrite.

Epreuve	Minimum	Maximum	Moyenne	Ecart-type
Mathématique générale (note sur 20)	0,25	17,25	6,54	3,95
Analyse et probabilité (note sur 20)	0,75	18	5,92	4,07
Total écrit	1,25	35	12,41	3,52

Les caractéristiques descriptives des notes à l'épreuve écrite

4.2 Répartition des notes des épreuves orales

On donne ci-dessous et pour chaque épreuve orale la suite des notes obtenues par les candidats marocains admissibles.

Ordre	Nom Prénoms	Oral AG sur 80	Oral AP sur 80	Oral MCS sur 80	Total Oral
1	OULGHAZI OMAR	67	78	47	192
2	ET-TAHRI FOUAD	51	48	33	132
3	FTOUHI MOSTAFA	53	52	20	125
4	MOUNTASSIR MOHAMED	56	59	49	164
5	EL HOR MOULAY LHOUSSINE	60,5	44	46	150,5
6	KARKOURI BADRE	66	72	16	154
7	NASSIRDINE AHMED	48	36	47	131
8	ELOMAIRY EL HASSANE	43	46	22	111
9	DEBLIJ AHMED	52	42	25	119
10	ABOUSALIM HAMID	43	56	45	144
11	NAJM-EDDINE KHALID	46,5	56	29	131,5
12	EL ASRI MOHAMED	58,5	52	44	154,5
13	ELKAF MARIEM	43	42	60	145
14	SEMMOURI ABDELLATIF	33	18	23	74
15	AIT LAARIF MOUAD	52	46	38	136
16	AFIF MOHAMMED	44,5	43	22	107,5
17	ESSAIDI YOUSSEF	59,5	44	41	144,5
18	ELAZRI ABDENBI	23,5	28	24	75,5
19	BOUTRIQ KHALID	47,5	46	45	138,5
20	HAKMAOUI HAMID	35,5	34	17	86,5
21	SAADI FAOUAZ	36	22	28	86
22	OUBOUHOU SAID	45,5	31	10	86,5
23	HAMDANE MOHAMMED	56,5	59	22	137,5
24	SALHI ABDELMAJID	27,5	16	20	63,5
25	BENADDI HAFID	37,5	40	14	91,5

Répartition des notes des épreuves orales

On présente ci-dessous les caractéristiques descriptives de chaque épreuve orale.

Epreuve	Minimum	Maximum	Moyenne	Ecart-type
Algèbre et géométrie (notes sur 80)	23,5	67	47,44	11,23
Analyse et probabilité (notes sur 80)	16	60	44,4	14,98
Modélisation et calcul scientifique (note sur 80)	10	60	31,4	13,61
Total oral (note sur 240)	63,5	192	123,2	63,5

Les caractéristiques descriptives des notes à l'épreuve orale

4.2.1 Bilan des épreuves écrites et comparaison de l'année 2013 à l'année 2016

Effectifs détaillés des condidats aux épreuves écrites de 2013 et 2016

Année	2013		2014		2015		2016	
Epreuve	MG	AP	MG	AP	MG	AP	MG	AP
Inscrits	63	63	61	61	99	99	60	60
Présents	41	42	32	32	53	53	47	47
Absents	22	21	29	29	46	46	13	13
Note moyenne sur 20	7,95	8,90	8,48	5,93	7,37	7,73	9,82	8,79

La moyenne générale, des épreuves écrite par matières, des candidats marocains admissibles est comme suit :

Année	2013		2014		2015		2016	
Nombre d'admis	20		14		16		25	
Epreuve	MG	AP	MG	AP	MG	AP	MG	AP
Moyenne sur 20	7,95	8,90	8,48	5,93	7,37	7,73	9,82	8,79

La moyenne générale des épreuves 'écrites des candidats marocains admissibles est comme suit :

Année	2013	2014	2015	2016
Admissibles	20	14	16	25
Moyenne des épreuves sur 20	8,42	7,20	7,55	8,30

4.2.2 Bilan des épreuves orales et comparaison de l'année 2013 à l'année 2016

La moyenne générale des épreuves orales par matière des candidats admissibles est comme suit :

Année	2013			2014			2015			2016		
Epreuve	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS
Présents	19	18	18	13	13	12	15	15	15	25	25	25
Moyenne 80	40,24	42,66	38,94	40,15	39,31	33,41	48,26	39,4	35,8	47,44	44,4	31,4

La moyenne générale des épreuves orales des candidats admissibles est comme suit:

Année	2013	2014	2015	2016
Admissibles	20	14	16	25
Moyenne des épreuves sur 80	41,91	37,62	41,15	41,08

La moyenne générale des épreuve orales par matière des candidats admis est comme suit :

Année	2013			2014			2015			2016		
Nombre d'admis	11			07			09			17		
Epreuve	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS
Moyenne sur 80	50,27	47,6	48,5	49,28	46,4	39,5	54,3	39,4	35,8	53,12	51,65	37

La moyenne générale des candidats admis est comme suit :

Année	2013	2014	2015	2016
Admis	11	07	09	17
Moyenne des épreuves sur 80	48,8	45,09	46,81	44,29

4.3 Evolution du nombre de candidats

Tableau récapitulatif des candidats admis à l'agrégation de mathématiques depuis la création de l'agrégation

Année	Nombre de Candidats Marocains	Nombre de Candidats Admissibles	Nombre de Candidats Admis
1988	8	7	3
1989	17	17	10
1990	29	23	16
1991	28	27	21
1992	27	27	24
1993	24	22	19
1994	24	22	19
1995	32	24	20
1996	36	22	20
1997	22	15	15
1998	28	11	11
1999	34	20	18
2000	37	14	13
2001	44	21	16
2002	38	22	16
2003	37	28	18
2004	34	28	14
2005	25	20	11
2006	38	15	08
2007	55	11	08
2008	64	25	16
2009	39	17	13
2010	28	03	02
2011	35	13	04
2012	77	15	06
2013	63	20	11
2014	61	14	07
2015	93	16	09
2016	47	25	17

Chapitre 5

Déroulement des épreuves orales

Le rapport qui suit, précise l'organisation des épreuves orales, les attentes du jury et donne des conseils permettant la mise en valeur des compétences et de la motivation des candidats ; ainsi que les modalités des déroulements des examens oraux qui sont formalisées et structurées pour que les candidats puissent se préparer, effectuer efficacement leur prestation et être à l' aise aux épreuves orales.

5.1 Modalités pratiques

5.1.1 Oral 1: Epreuve d'algèbre et géométrie

Le candidat reçoit son enveloppe dans laquelle il y a deux sujets parmi une liste d'une cinquantaine de sujets connus à l'avance. Il choisit un des sujets et dispose de trois heures (3h) pour le préparer. Durant cette préparation le candidat dispose des livres de la bibliothèque de l'Agrégation mais n'a pas accès à l'Internet ni à tout autre objet électronique.
Le candidat peut disposer de ses propres livres sous deux conditions :

- Les livres doivent être autorisés par le jury (en particulier ne pas être annotés) et
- Les livres doivent être déposés dans la salle de préparation pour être à la disposition de tous les candidats, pendant toute la durée de l'oral.

Le jury fait procéder à la photocopie des plans préparés par les candidats. Ces derniers sont manuscrits, comportent 3 pages $A4$ au maximum et possèdent une marge de $1cm$ sur tous les côtés afin d'éviter tout problème lors de la photocopie. Il est conseillé de ne pas utiliser de stylos de couleurs. Il est en revanche conseillé de soigner la présentation du plan écrit, de mettre des titres, d'encadrer les formules, etc. pour qu'il soit le plus lisible possible. Les plans peuvent être complétés par une quatrième page consacrée aux figures. Il faut noter clairement, sur le plan, les développements proposés. Le candidat peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve et pourra utiliser les notes manuscrites qu'il avait produit durant la préparation.
L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale d'un maximum de 60 minutes environ : une présentation du plan éventuellement suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes maximum et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions.

Première partie : présentation du plan

Le candidat est convié à utiliser son temps de parole (6 minutes maximum) pour présenter, argumenter, mettre en valeur et faire une synthèse de son plan. Ce dernier doit être bien structuré : il définit avec précision les notions introduites, donne les énoncés complets des résultats fondamentaux, cite des exemples et des applications. Comme le jury possède une copie du texte, il est inutile de recopier le plan au tableau. Toutefois il peut être pertinent d'utiliser le tableau pour écrire l'architecture du plan, les théorèmes importants ou un exemple significatif, voire faire un dessin. Le candidat peut faire un bref exposé introductif et commenter utilement ensuite ses résultats principaux, les outils développés, l'organisation d'ensemble et les méthodes utilisées. La présentation orale, l'organisation et la cohérence globale du plan écrit constituent des éléments importants d'appréciation.

Deuxième partie : le développement

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements en égard au niveau du candidat. Il est souhaitable que le candidat recherche une adéquation entre son niveau intrinsèque et les développements proposés. Il faut veiller à rester au niveau de l'Agrégation. Le candidat doit aussi préciser, sur son plan écrit, ce qu'il va démontrer et, le cas échéant, les résultats de son plan qu'il va admettre pour mener à bien son développement. La pertinence des explications, le souci pédagogique, la capacité à mener à bien et complètement le sujet dans le temps imparti, l'aisance technique sont des éléments importants d'appréciation. Par ailleurs, le candidat doit s'attendre à être interrogé lors de la période de discussion sur des applications ou illustrations élémentaires de son développement.

Troisième partie : questions et dialogue

Le jury vérifie systématiquement la maîtrise approfondie du plan presenté. C'est à dire qu'une part importante de la discussion portera sur le plan, ou trouvera sa source dans le plan présenté par le candidat. Il est essentiel que le candidat maîtrise ce qu'il propose. Il doit s'attendre à ce que le jury lui pose aussi des exercices en rapport direct avec la leçon. Le but est de voir le candidat dans une démarche scientifique rigoureuse et méthodique : faire une analyse de l'exercice, établir des liens avec les résultats connus (qui peuvent être ceux du plan), proposer des calculs et raisonnements pouvant conduire à la solution de la question posée. La qualité du dialogue, les réponses aux questions, l'utilisation du plan écrit et l'écoute dont le candidat fait preuve sont des éléments importants de notation.

Remarque 5.1.1 (Remarques du jury d'algèbre et géométrie)

1. *Le jury a remarqué que certains candidats préparaient à l'avance et avant même la péridode des oraux des sujets qu'ils jugeaient pouvoir servir pour plusieurs leçons.*

2. *Certains candidats ont dévoloppé leurs exposés d'une manière ne touchant pas le thème principal des leçons accordées. Un candidat qui avait à dévolopper un sujet sur la théorie de la dimension des espaces vectoriels a présenté un théorème où il utilisait un raisonnement par récurrence sur la dimension !!!*

3. *Un bon nombre de candidats ont tendance à choisir des sujets d'algèbre linéaire. Peu d'entre eux ont développé des sujets portant sur les structures algébriques et la géométrie.*

4. *Le jury recommande le développement par chaque candidat d'au moins deux sujets.*

5.1.2 Oral 2 : d'analyse et probabilités :

Les probabilités et les statistiques sont utilisées ensemble dans de nombreuses applications où l'imprévu et le hasard dominent. Les probabilités sont très utiles dans les mécanismes décisionnels en univers incertain. Avec l'informatique, des simulations aléatoires peuvent être réalisées afin d'aider à la prise de décision dans de nombreux cas, comme l'évaluation des risques financiers (risques sur les marchés pour les banques), à fixer les prix de produits financiers et des primes de contrats d'assurance, compte tenu des nombreux risques ayant pour origine le marché ou le client (secteur d'assurances), les mesures d'audience des médias par des instituts de sondage, les prévisions d'appel sur téléphone portable pour optimiser le déploiement du réseau et les études de sureté de fonctionnement.
Aussi depuis les années 1980, les banques ont fait recours aux mathématiciens et la tendance de recrutement est plus récente au niveau des assurances. Les compétences exigées couvrent les mathématiques appliquées aux finances et à l'assurance (statistique, probabilités et actuariat). Le marché dans ce secteur est très prometeur.
Tenant compte de ces tendances observées sur le marché de l'emploi, la plupart des grandes écoles d'ingénieurs, ont creé des filières d'ingénierie financière pour former des compétences nécessaires afin de comprendre et maitriser la complexité des marchés financiers.

Lors des épreuves orales d'analyse et probabilités nous avons malheureusement constaté :

1. En ce qui concerne les probabilités : la plupart des candidats évitent de choisir les sujets de probabilités. Pourtant les lecons proposées, douze au total, sont d'un niveau élémentaire : introduction au calcul des probabilités (voir le programme en annexe). Il faut noter que les connaissances et les compétences acquises par un titulaire d'une licence en mathématiques sont suffisantes pour comprendre avec aisance le contenu essentiel

du programme de calcul des probabilités. Sur les 25 admissibles un seul a choisi un sujet de probabilités: Loi des grands nombres, Théorème central limite et Applications. La raison de ce choix est que le candidat a suivi, durant son cursus universitaire, un cours de probabilités. Il faut aussi signaler, d'une part que les probabilités font partie des cours enseignés aux classes préparatoires, d'autre part l'accès des étudiants aux filières précitées, obligent à investir davantage dans la mise à niveau des candidats en calcul de probabilités durant leurs formations.

2. En ce qui concerne l'analyse : dans certains développements proposés les idées du sujet préparé n'apparaissent pas de manière significative et le développement ne reflète nullement leurs importance . Il est important de mentionner aux candidats que le développement envisagé devrait être en étroite connexion avec le sujet.

5.1.3 Oral 3 : modélisation et calcul scientifique :

Le candidat tire au sort une enveloppe dans laquelle il y a deux textes. Il choisit un texte et dispose de 4 heures de préparation, pendant lesquelles il dispose des ouvrages de la bibliothèque de l'agrégation. Le candidat peut disposer de ses propres livres sous les deux conditions citées dans le paragraphe 5.1.1.

Le jury souhaite rappeler ce qu'il attend des candidats dans cette épreuve.
Les textes sont surmontés du bandeau suivant:

- Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Il vous est conseillé de construire un exposé évitant la paraphrase et mettant en lumière vos connaissances, à partir des éléments du texte. Vous êtes libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des pistes de réflexion, largement indépendantes les unes des autres, sont proposées en fin de texte ; vous n'êtes pas tenu de les suivre. Le propos devra être illustré par des traitements ou des simulations numériques sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Le jury souhaiterait que le plan de la présentation soit annoncé au début de l'exposé.

  Les textes se terminent par le bandeau suivant :

- Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives : vous n'êtes pas obligé de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut, si vos traitements ou simulations numériques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en oeuvre.

L'interrogation dure 1 heure et quart, pendant laquelle le candidat gère comme il le désire le tableau et les illustrations informatiques qu'il entend présenter. Le candidat doit préparer un exposé d'environ 40 minutes, les 20 minutes restantes étant occupées par les questions du jury.
Le texte est court, environ 5 pages, motivé par un problème concret. Il peut présenter des arguments rapides, voire heuristiques (signalés comme tels). Il ne contient pas d'assertion délibérément trompeuse et se conclut par une liste de suggestions. Le candidat dispose pendant sa préparation et l'interrogation d'un ordinateur muni des logiciels suivants : Scilab et Python. Les supports informatiques (USB, par exemple) utilisés au cours de l'épreuve sont fournis par le jury et identifiés de manière explicite pour chaque candidat. Il est interdit d'introduire tout autre support informatique comme par exemple des clés usb personnelles. Une imprimante sera mise à disposition des candidats dans la salle de préparation.
Dans cette épreuve, le candidat est appelé à faire preuve d'initiative pour s'exprimer et manifester ses qualités pédagogiques et de synthèse. Le texte fourni est un point de départ pour construire et exposer un traitement mathématique d'un problème concret en s'appuyant sur les éléments, généralement partiels, disséminés dans le texte. La présentation doit s'appuyer sur un dosage cohérent et harmonieux entre introduction motivée de modèles, preuves mathématiques, illustrations informatiques, critiques éventuelles du texte, réponses aux questions et mise en lumière de connaissances. Il est recommandé aux candidats de consacrer une partie de leur temps de préparation à s'interroger sur la stratégie d'exploitation du tableau et d'utilisation de l'outil informatique qui leur permettra de mettre au mieux en valeur leurs connaissances et leur compréhension du texte ou d'une partie de celui-ci. En début d'épreuve, il est demandé au candidat d'annoncer le plan qui va structurer sa présentation. Répondre à cette requête ne peut s'improviser et doit faire l'objet d'une réflexion préalable durant la préparation.

La rigueur et la clarté de l'organisation, la gestion du temps, la pertinence des choix opérés parmi les différentes questions soulevées par le texte sont des éléments de l'évaluation. Les qualités de synthèse sont aussi appelées à s'exprimer. À un survol superficiel de l'intégralité du texte sans apport mathématique ou critique scientifique, le candidat doit préférer une discussion fouillée d'une portion du texte, bâttie sur des arguments mathématiques solides, des simulations pertinentes accompagnées de commentaires de bon aloi.
La paraphrase pure et simple d'amples portions du texte ne constitue en aucun cas un exposé satisfaisant.

Chapitre 6

Listes des leçons d'Algèbre-Géométrie et d'Analyse-Probabilités

Les listes des leçons sont données à titre indicatif. Une grande partie de ces leçons seront reprises pour la session 2017, des modifications et des évolutions sont possibles. Il est conseillé aux candidats de lire avec la plus grande attention l'intitulé de la leçon.

6.1 Liste des leçons d'Algèbre et Géométrie

1. Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
2. Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.
3. Exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient.
4. Groupes finis. Exemples et applications.
5. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
6. Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.
7. Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
8. Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
9. Représentations de groupes finis de petit cardinal
10. Caractères d'un groupe abélien fini et transformée de fourier discrète. Applications.
11. Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.
12. Nombres premiers. Applications.
13. Anneaux principaux. Applications.
14. Corps finis. Applications.
15. Anneau des séries formelles. Applications.
16. Extensions de corps. Exemples et applications.
17. Exemples d'équations diophantiennes
18. Droite projective et birapport
19. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.

20. Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
21. Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.
22. Résultant. Applications.
23. Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Localisation des racines dans les cas réel et complexe.
24. Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.
25. Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang.
26. Déterminant. Exemples et applications.
27. Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
28. Sous-espaces stables par un endomorphisme ou d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
29. Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
30. Exponentielle de matrices. Applications.
31. Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
32. Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
33. Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.
34. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).
35. Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite. Applications en dimensions 2 et 3.
36. Systèmes d'équations linéaires ; opérations, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.
37. Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
38. Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.
39. Coniques. Applications.
40. Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.
41. Applications des nombres complexes à la géométrie. Homographies
42. Utilisation des groupes en géométrie.
43. Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

6.2 Liste des Leçons d'Analyse et Probabilités

1. Espaces de fonctions : exemples et applications.
2. Exemples de parties denses et applications.
3. Utilisation de la notion de compacité.
4. Connexité. Exemples et applications.
5. Espaces complets. Exemples et applications.
6. Théorèmes du point fixe. Exemples et applications.

7. Prolongement de fonctions. Exemples et applications.
8. Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
9. Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
10. Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonometriques. Exemples et applications.
11. Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.
12. Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications
13. Étude métrique des courbes. Exemples.
14. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Exemples
15. Applications des formules de TAYLOR.
16. Problèmes d'extremums. Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications
17. Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études qualitatives des solutions.
18. Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.
19. Exemple d'équations aux dérivées partielles linéaires.
20. Convergence des suites numériques. Exemples et applications des suites numériques.
21. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications
22. Comportement asymptotique de suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.
23. Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.
24. Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.
25. Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
26. Fonctions à variations bornées. Exemples et applications.
27. Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.
28. Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.
29. Espaces L^p ,$1 \leq p \leq +\infty$.
30. Suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications.
31. Illustrer, par des exemples, quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou de plusieurs variables réelles.
32. Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
33. Produit de convolution, transformation de FOURIER. Applications.
34. Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
35. Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
36. Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.
37. Séries de FOURIER. Exemples et applications.
38. Exemples de problèmes d'interversion de limites.

39. Suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.
40. Loi binomiale. Loi de POISSON. Applications.
41. Vecteurs aléatoires et indépendance
42. Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.
43. Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.
44. Loi des grands nombres. Théorème central limite. Applications.
45. Fonctions de répartitions. Proriétés et applications
46. Fonctions caractéristiques. Proriétés et applications
47. Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples
48. Mode de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications
49. Variables aléatoires à densité. Exemples et applications
50. Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications
51. Utilisation de la notion de convexité en analyse.
52. Espaces de SCHWARTZS ($\mathbb{R}^d$) et distributions tempérées. Transformation de FOURIER dans $S(\mathbb{R}^d)$ et $S^0(\mathbb{R}^d)$.
53. Espaces de Schwartz. Distributions. Dérivation au sens des distributions

Chapitre 7

Texte de l'épreuve de modélisation

L'oral du concours de l'Agrégation Marocaine de Mathématique comporte trois épreuves, l'une portant principalement sur les domaines Algèbre-Géométrie, la deuxième principalement sur les domaines Analyse-Probabilités, la troisième sur les problèmes de Modélisation Mathématique. Cette dernière épreuve s'appuie sur des connaissances générales d'Algèbre-Géométrie-Analyse-Probabilités mais elle diffère fondamentalement des deux premières :

- par les objectifs : il s'agit d'étudier des situations concrètes, de réfléchir aux diverses possibilités de traduire mathématiquement une telle situation et de proposer des solutions adaptées

- par la forme de l'épreuve : le candidat tire un sujet contenant un texte scientifique (avec des pistes de réflexion) et un intitulé de leçon de calcul scientifique ou formel (orienté vers la modélisation). Il choisit le texte ou la leçon et dispose de quatre heures pour préparer son passage devant le jury.

- par les outils mis à sa disposition pendant les quatre heures de préparation : le candidat travaille à l'aide des livres de la bibliothèque de l'Agrégation ou de ses propres livres s'ils sont autorisés par le jury. Il dispose aussi d'un ordinateur équipé de divers logiciels mathématiques.

À l'issue de sa préparation, le candidat présente les fruits de sa réflexion au jury, pendant environ une heure et quart. On attend de lui qu'il

1. présente la modèlisation mis en oeuvre dans le texte ou la leçon, ce qu'il en a compris
2. détaille certains résultats mathématiques utiles pour le sujet étudié
3. discute les hypothèses introduites par le texte ou les hypothèses choisies pour la leçon
4. montre l'exploitation possible du sujet dans une séquence pédagogique (on peut penser aux TIPE des classes préparatoires, aux travaux personnels des classes terminales de lycées)
5. présente un ou plusieurs programmes informatiques qui sont utiles dans la résolution de problèmes introduits par le sujet et qui illustrent les résultats obtenus

Lors des vingt dernières minutes de l'interrogation orale, le jury pose des questions diverses en relation avec le sujet. Il peut revenir sur des points peu clairs de la présentation ou proposer d'autres approches de la situation étudiée, d'autres pistes de travail.

Lors des oraux de Modélisation Mathématique 2016 le jury a noté que

- les candidats ont, pour la plupart, préparé avec sérieux cette épreuve très particulière de l'Oral

- certains candidats ont utilisé efficacement l'ordinateur et les logiciels mis à disposition; les candidats qui refusent l'usage de l'outil informatique sont maintenant une minorité

- la moyenne des notes est environ 8/20 et l'écart-type environ 3,5. Pour les sept candidats qui ont choisi la leçon, la moyenne est 26,5/80. La moyenne des notes des dix-huit candidats qui ont choisi le texte est un peu meilleure : 29,7/80

- les notes vraiment faibles résultent d'une compréhension insuffisante du sujet, de connaissances mathématiques mail assurées, de résultats erronés ou illogiques, de l'absence d'illustration informatique voire du refus d'utiliser l'ordinateur.

7.1 Texte 1 de l'épreuve de modélisation

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

7.1.1 Introduction, l'image numérique

L'intérêt des images numériques à coté des images analogiques est une évidence depuis la fin du vingtième siècle. Elles permettent un travail efficace et simple aussi bien pour le stockage (compression), que pour le traitement ou l'analyse (par des moyens informatiques).

Une image numérique est obtenue en captant la lumière provenant d'une scène ou d'un document par des capteurs électroniques, les CCD (charge couple device). Ces capteurs convertissent le signal lumineux en données numériques. Ces données sont organisées en tableaux à double entrée (horizontal, vertical), i.e. en matrices. Chaque terme de la matrice donne l'information lumineuse provenant d'une zone physique de la scène, du document. Le terme $m_{i,j}$ correspond à la zone rectangulaire $[a, b] \times [c, d]$, est subdivisée en petits rectangles

$$\left[a + \frac{(i-1/2)(b-a)}{n}, a + \frac{(i+1/2)(b-a)}{n}\right] \times \left[c + \frac{(j-1/2)(d-c)}{p}, c + \frac{(j+1/2)(d-c)}{p}\right].$$

On parle de pixel (picture element).

Les images numériques présentent un aspect discret, à l'opposé de la scène (ou document) d'origine qui est de caractère continu. L'aspect discret provient d'abord d'une discrétisation spatiale, remplacement d'une zone rectangulaire par un couple d'entiers (i, j). Il provient aussi de la quantification des intensités lumineuses, les termes de la matrice sont choisis dans un intervalle entier, $[[0, 255]]$ par exemple, s'il y a une seule couleur ou bien des niveaux de gris. Il faut trois matrices pour rendre compte des couleurs réelles, en utilisant le système trichromatique RGB par exemple (RGB= red, green, blue).

7.1.2 Analyse élémentaire de l'image numérique

On considère ici une image numérique en niveaux de gris, donnée par une matrice M carrée d'ordre 512 dont les termes sont éléments de [[0,255]]. Un des premiers indicateurs utiles sur l'image est la répartition des niveaux de gris, c'est à dire un vecteur ligne $R = (n_0, \cdots, n_{255})$ où n_k est le nombre de pixels d'intensité k (i.e. de termes de M valant k). En regroupant les niveaux en classes adjacentes (par exemple 32 segments de longueur 8) on simplifie le travail ultérieur (la répartition devient un vecteur ligne de taille 16), sans perte importante d'information. On représente graphiquement cette répartition, on dispose ainsi d'un histogramme de l'image.
Cette répartiton donne une idée du contraste de l'intensité dans l'image. Des transformations simples permettent d'améliorer le contraste, par exemple de rendre plus uniforme la répartition, d'étaler son support.

La recherche des (i, j) où l'intensité varie brusquement permet d'identifier les contours des objets présents dans la scène ou le document. Les plages d'indice où l'intensité varie peu, ou bien varie régulièrement - avec des répétitions - identifie des objets ou des parties d'objet présentant une texture particulière. On parle d'analyse de contours et d'analyse de textures.

7.1.3 Compression d'image numérique par SVD

On note $I(M)$ la quantité d'information portée par une image M. Dans le cas d'une image en niveaux de gris, avec M carrée d'ordre 512 dont les termes appartiennent à [[0,255]], $I(M)$ est de l'ordre de $512^2 \times 8$ (les termes $m_{i,j}$ sont écrits en base 2), approximativement $\boxed{2{,}36\ 10^6}$. Comprimer une image M consiste à la remplacer par une autre

image M' proche de M - l'idéal étant qu'un oeil humain confonde pratiquement ces deux images - mais de poids bien inférieur, $I(M') << I(M)$.
Une technique classiquement utilisée repose sur la notion de valeurs singulières des matrices. Le théorème (Beltrami, Jordan, Sylvester ... puis Eckart-Young) s'énonce : pour toute matrice réelle A de taille n, p, il existe des matrices orthogonales U, V_t et une matrice D de taille n, p telles que

$$i \neq j \Rightarrow d_{i,j} = 0 \text{ et } d_{1,1} \geq d_{2,2} \geq \cdots \geq d_{q,q} \geq 0 \tag{7.1.1}$$

où $q = \min(n, p)$. L'extension aux matrices complexes est valide, avec U, V unitaires et D respectant (7.1.1). Les $d_{i,i}$ sont analogues à des niveaux d'énergie, corresondant aux vecteurs d'une nouvelle base, ils sont positifs et ordonnés en décroissant. Ils peuvent contenir des répétitions et si les k derniers sont 0 cela signifie que le rang de A est $q - k$.

En pratique il est courant de trouver un nombre relativement important de$d_{i,i}$ nuls ou proches de 0. On peut fixe un seuil, par exemple $s = d_{1,1}/100$, on considère alors que la matrice $M' = UD'V_t$ où D' est obtenue en remplaçant dans D les $d_{i,i}$ infériurs au seuil par 0 donne une image proche de M. Il est clair que $I(M')$ est inférieur à $I(M$, voire très inférieur. Par exemple si M est d'ordre 512 et si la moitié des $d_{i,i}$ est négligée on obtient

$$M' = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1\Delta & 0 \\ U_3\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1\Delta V_1 & U_1\Delta V_2 \\ U_3\Delta V_1 & U_3\Delta V_2 \end{pmatrix}$$

ce qui limite la quantité d'information à $4 \times 256^2 + 256 =$ environ $\boxed{2{,}62\ 10^5}$, soit un gain de facteur 10 environ.

7.1.4 Extrait d'un sujet de concours CPGE sur la SVD

Notations

Soit n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant n lignes et p colonnes. On identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ respectivement à $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ que l'on supposera munis de leurs produits scalaires canoniques notés respectivement $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_n$ et $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_p$. Les normes associées seront notées respectivement $\| \cdot \|_n$ et $\| \cdot \|_p$.
On notera $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $(F_j)_{1 \leq j \leq n}$ celle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Lorsque $p = n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et est muni de sa structure d'algèbre, I_n représentant la matrice identité. On écrit $0_{n,p}$ pour la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et 0_n pour la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour A appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^{\mathrm{t}}A$ désigne la matrice transposée de A : c'est un élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. $\operatorname{Ker} A$ désigne est le noyau de A, $\operatorname{Im} A$ l'image de A. Le noyau de A est $\{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0 \}$, noté $\operatorname{Ker} A$, l'image de A est $\{ AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \}$, notée $\operatorname{Im} A$. On note $F^{\perp}$ l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F d'un espace euclidien.

Partie I

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
I.1. Montrer que ${}^{\mathrm{t}}AA$ est nulle si et seulement si A est nulle.
Dans toute la suite du problème A sera supposée non nulle.
I.2. Montrer que les matrices ${}^{\mathrm{t}}AA$ et $A{}^{\mathrm{t}}A$ sont diagonalisables au moyen de matrices orthogonales.
I.1.a) X, Y désignant deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, exprimer le produit scalaire $\langle X \mid Y \rangle_n$ sous la forme d'un produit matriciel.

b) Si W est un vecteur propre de ${}^{\mathrm{t}}AA$ associé à la valeur propre λ, exprimer $\| AW \|_n^2$ en fonction de λ et $\| W \|_p$.

c) En déduire que les valeurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$ sont réelles, positives ou nulles.

I.4.a) Pour x réel, calculer les produits matriciels par bloc suivants:

$$\begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^{\mathrm{t}}A & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & 0_{n,p} \\ {}^{\mathrm{t}}A & I_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^{\mathrm{t}}A & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0_{p,n} & -xI_p \end{pmatrix}$$

b) En déduire que les matrices ${}^{\mathrm{t}}AA$ et $A{}^{\mathrm{t}}A$ ont les mêmes valeurs propres non nulles avec le même ordre de multiplicité.

c) En déduire également que les matrices ${}^{\mathrm{t}}AA$ et $A{}^{\mathrm{t}}A$ ont même rang.

I.5. Montrer que si $n > p$, 0 est valeur propre de $A{}^{\mathrm{t}}A$ et que si $n < p$, 0 est valeur propre de ${}^{\mathrm{t}}AA$.

I.6. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$, chaque valeur propre apparaissant dans cette liste un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et on pose $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout i élément de $\{1, 2, \dots, p\}$.
Les réels μ_i sont appelés valeurs singulières de A.
On suppose les réels λ_i ordonnés tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$.

a) Montrer que λ_1 est non nul.

On définit alors un unique entier naturel r appartenant à $\{1, 2, \dots, p\}$ comme suit : si toutes les valeurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$ sont non nulles, $r = p$, sinon r est tel que pour tout $i \leq r$, $\lambda_i > 0$ et pour tout $i > r$, $\lambda_i = 0$.
Soit $(V_1, V_2, \dots, V_p)$ une base orthonormale de vecteurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$ respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$; $V_1, V_2, \dots, V_r$ désignent les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles et lorsque r est strictement inférieur à p, $V_{r+1}, \dots, V_p$ désignent les vecteurs propres associés à la valeur propre 0.

b) Montrer que $r \leq n$ et que la dimension de $\operatorname{Ker} A{}^{\mathrm{t}}A$ est égale à $n - r$.

Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on pose $U_i = \dfrac{1}{\mu_i} AV_i$ et si $n > r$, on désigne par $(U_{r+1}, \dots, U_n)$ une base orthonormale de $\operatorname{Ker} A{}^{\mathrm{t}}A$.

c) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $AV_i = \mu_i U_i$ et que si r est strictement inférieur à p, pour tout $i \in \{\, r+1, \dots, p\,\}$, $AV_i = 0$.

d) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, ${}^{\mathrm{t}}AU_i = \mu_i V_i$.

e) Montrer que si $n > r$, pour tout $i \in \{\, r+1, \dots, n\,\}$, ${}^{\mathrm{t}}AU_i = 0$.

f) En déduire que le système de vecteurs $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ constitue une base orthonormale de vecteurs propres de $A{}^{\mathrm{t}}A$ et préciser la valeur propre associée à chaque vecteur U_i.

I.7. On note V la matrice carrée réelle d'ordre p dont le i$^{\text{ème}}$ vecteur colonne est le vecteur V_i, U la matrice carrée réelle d'ordre n dont le j$^{\text{ème}}$ vecteur colonne est le vecteur U_j et $({}^{\mathrm{t}}UAV)_{i,j}$ l'élément de la i$^{\text{ème}}$ ligne, j$^{\text{ème}}$ colonne de la matrice ${}^{\mathrm{t}}UAV$.

a) Montrer que :

$$\forall (i,j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, p\},\ ({}^{\mathrm{t}}UAV)_{i,j} = \mu_j \delta_{i,j} \quad \text{où} \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

b) On note Δ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments $\Delta_{i,j}$ sont nuls sauf $\Delta_{11}, \Delta_{22}, \dots, \Delta_{rr}$ respectivement égaux à $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$. Montrer que $A = U\Delta{}^{\mathrm{t}}V$.
La factorisation de A ainsi obtenue est dite décomposition de A en valeurs singulières.

c) Trouver une décomposition en valeurs singulières de chacune des matrices :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

I.8. Montrer que le rang de A est égal à r.

I.9.a) Montrer que $V = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} V_i{}^{\mathrm{t}}E_i$.

b) En déduire : $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i{}^{\mathrm{t}}V_i \quad , \quad {}^{\mathrm{t}}AA = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i V_i{}^{\mathrm{t}}V_i \quad , \quad A{}^{\mathrm{t}}A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i{}^{\mathrm{t}}U_i$

c) Déterminer les sous-espaces vectoriels suivants : $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Ker}{}^{\mathrm{t}}A$, $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Im}{}^{\mathrm{t}}A$.

d) Montrer que $\operatorname{Ker}{}^{\mathrm{t}}AA = \operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Ker} A{}^{\mathrm{t}}A = \operatorname{Ker}{}^{\mathrm{t}}A$.

Partie II

Avec les notations de la partie **I**, pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ admettant une décomposition en valeurs singulières $A = U\Delta{}^{\mathrm{t}}V$, on appelle Δ^+ la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ dont tpus les éléments $\Delta^+_{i,j}$ sont nuls sauf $\Delta^+_{11}, \Delta^+_{22}, \dots, \Delta^+_{rr}$ respectivement égaux à $\dfrac{1}{\mu_1}, \dfrac{1}{\mu_2}, \dots, \dfrac{1}{\mu_r}$ et on pose $A^+ = V(\Delta^+){}^{\mathrm{t}}U$.
*Δ^+ (resp. A^+) est appelée pseudo-inverse de Δ (resp. de A). A priori, la matrice A^+ ainsi définie dépend de la décomposition en valeurs singulières choisie pour la matrice A, mais il sera montré à la question **II.9** qu'il n'en est rien et que A^+ est uniquement déterminée à partir de A.*

1. Déterminer les matrices A_0^+, $A_0A_0^+$, $A_0^+A_0$, $A_0A_0^+A_0$ et $A_0^+A_0A_0^+$.

2. Déterminer $(A_0^+)^+$.

3. Évaluer $\Delta^+\Delta$ et $\Delta\Delta^+$.

4. Montrer que si A est une matrice carrée inversible $(n = p = r)$, alors $A^+ = A^{-1}$.

7.1.5 Indications pour le traitement d'images avec des logiciels mathématiques

La plupart des logiciels mathématiques (Maple, Matlab, Scilab, Python ...) permettent de travailler sur des images. Donnons ci dessous quelques indications pour Scilab :
En Scilab utiliser le module SIVP (menu Modules) qui permet de tavailler sur les images numériques. On suppose disposer sur le répertoire courant de Scilab d'une image nomdimage.jpg. L'instruction M=imread('nomdimage.jpg') fournit une matrice à termes entiers de 0 à 255.

En fait ce sont des entiers modulo 256 et il est pratique de les transformer en entiers ordinaires par la commande M1=double(M) // double signifie ici entiers longs

On peut utiliser les commandes usuelles de Scilab et opérer sur $M1$. Pour visualiser la matrice $M2$ finalement obtenue on peut utiliser les commandes du module SIVP ou, plus simplement, les tracés ordinaires par plot et ses variantes. On conseille la séquence d'instructions suivante:

z=scf(); // une 'fonction' z est ainsi définie qui permet de jouer sur le graphique courant
grayplot(1:m,n:-1:1,MM) // NB c'est une image en couleurs qui est affichée dans la fenêtre Figure
z.color_map=graycolormap(32); // transforme les couleurs en niveaux de gris.
On l'exporte en fichier .jpg par menu de la fenêtre Figure.

7.1.6 Suggestions de développement

Ce paragraphe ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

Aspect mathématique

- Donner une preuve de l'unicité de A^+, matrice définie au début de la partie 2 du sujet CPGE, matrice qu'on appelle pseudo-inverse de A. Donner quelques propriétés de la pseudo-inverse.

- Donner des exemples de calcul de décomposition en valeurs singulières en petite dimension.

- En suivant le sujet de concours ou en le modifiant, donner une preuve de la décomposition en valeurs singulières pour une matrice rectangulaire.

- Que donne la SVD de A si A est une matrice symétrique, antisymétrique, orthogonale, idempotente, ... ?

Aspect modélisation, calcul numérique et algorithmique

- Quel est l'intért de modèles numériques pour les images?

- Travailler sur une image présente sur l'ordinateur, déterminer l'histogramme ou d'autres caractéristiques de l'image.

- Proposer un programme informatique permettant de calculer et afficher les contours présents dans une image. Appliquer sur un exemple.

- Appliquer la méthode SVD pour transformer une image I en une image I' pratiquement similaire à I mais de poids bien inférieur (en termes de longueur de fichier). Essayer plusieurs seuils et discuter au vu des images obtenues.

- Modifier une image en lui ajoutant (informatiquement) du bruit. Pour cela on ajoute à la matrice de l'image une matrice dont les termes sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi, loi centrée (qui admet une espérance 0). Proposer une méthode, un algorithme, un programme permettant d'éliminer une grande partie du bruit (restauration d'images).

- Proposer un algorithme, un programme donnant la SVD d'une matrice entrée par l'utilisateur (ou chargée à partir d'un fichier).

7.2 Texte 2 de l'épreuve de modélisation

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

7.2.1 Le problème de Dirichlet

On considère un solide homogène, conduteur de chaleur et tel qu'en tout point de la surface extérieure la température ne varie pas. Il est clair que le champ des températures à l'intérieur du solide va évoluer avec le temps jusqu'à atteindre un équilibre thermique.
Les hypothèses raisonnables du modèle sont
- la fonction qui à tout point de la surface du solide associe sa température est continue (et constante par rapport au temps comme indiqué plus haut).
- à tout instant fixé, en tout point M intérieur au solide la température en M est la moyenne des températures prises sur une petite boule centrée en M (propagation de la chaleur dans un solide homogène qui ne contient aucune source de chaleur interne)

On s'intéresse donc au problème suivant, dit de Dirichlet avec condition au bord :
Soit G un ouvert convexe et borné de $\mathbb{R}^d$, ∂G sa frontière et soit φ une fonction continue de ∂G dans $\mathbb{R}$. Chercher une fonction continue f de $\overline{G}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant
(a) $\forall x \in G, \quad \forall r \in]0, dist(x, \partial G)[, \quad f(x) = \displaystyle\int_{|y| \leq r} f(x+y)dy$
(b) $\forall x \in \partial G, \quad f(x) = \varphi(x)$

Une solution de ce problème est nécessairement régilière et vérifie une EDP o intervient le laplacien de f, $\Delta f = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \partial^2_{k,k} f$, on peut énoncer :

Theorem 7.2.1 *Une fonction f est solution du problème de Dirichlet sur G avec condition au bord h si et seulement si elle est de classe C^2 sur G, continue sur $\overline{G}$, vérifie la condition au bord (b) et l'EDP (c) $\Delta f(x) = 0$, pour tout $x \in G$.*

On connait des théorèmes qui assurent, modulo des conditions sur le domaine G et sa frontière, l'existence ou l'unicité de f, solution du problème de Dirichlet $\left\{ \begin{array}{l} (c) \\ (b) \end{array} \right.$. Mais il n'y a pas de formule explicite pour exprimer la solution en général et on est amené à développer des méthodes numériques d'approximation des solutions. Un cas particulier o existe une solution sous forme intégrale est celui des boules (euclidiennes), on dispose alors du résultat suivant

Theorem 7.2.2 *Le problème de Dirichlet sur la boule $B(0,r)$ avec condition au bord φ est donnée par*

$$f(x) = \int_{\partial[B(0,r)]} \varphi(z) \frac{r^2 - \|x\|^2}{\|z-x\|^d} m_r(dz)$$

o m_r est la mesure uniforme sur la sphère $S(0,r) = \partial[B(0,r)]$ de masse μ_r choisie pour avoir $\displaystyle\int_{\partial[B(0,r)]} \frac{r^2 - \|x\|^2}{\|z-x\|^d} m_r(dz) = 1$.

La valeur de la solution en x est une moyenne des valeurs de h relativement à une probabilité dépendant de x portée par la sphère $S(0,r)$. La fonction densité $z \mapsto \dfrac{r^2 - \|x\|^2}{\|z-x\|^d}$ est appelée noyau de Poisson.

Dans le cas d'un domaine G non borné il faut des conditions supplémentaires pour obtenir existence ou unicité d'une solution. Un cas simple à traiter est celui de $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ pour lequel la solution est donnée par

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z) \frac{x_2}{(x_1 - z)^2 + x_2^2} dz$$

La probabilité portée par la frontière de G est ici la loi de Cauchy translatée en x.

7.2.2 Méthodes numériques de résolution

Déterministe

On discrétise l'espace, notant $h > 0$ le pas de discrétisation, notant $\sim_h$ la relation de voisinage :

$$\forall (x,y) \in h\mathbb{Z}^d, \quad x \sim_h y \Leftrightarrow \|y - x\| = h$$

posant $G_h = G \cap h\mathbb{Z}^d$ et $\partial_h G = \{x \in h\mathbb{Z}^d \setminus G_h, \quad \exists y \in G_h, \ x \sim_h y\}$.
Le laplacien discret est donné par $\Delta_h f(x) = \dfrac{1}{2d} \displaystyle\sum_{y \sim_h x} f(y) - f(x)$.
Remarquer que $\Delta_h f(x) = 0$ équivaut à $f(x) =$ moyenne uniforme de f sur le voisinage de x, ce qui confirme le lien entre les propriétés (a) et (b) du paragraphe précédent.
Le problème de Dirichlet sur G avec condition au bord φ est remplacé par sa version discrète :
chercher f_h définie sur $G_h \cup \partial_h G$ telle que $\left\{ \begin{array}{l} (1) \forall x \in G_h, \quad \Delta_h(f)(x) = 0 \\ (2) \forall x \in \partial_h G, \ f(x) = \varphi_h(x) \end{array} \right.$
avec $\varphi_h(x) =$ valeur moyenne de φ sur $\partial_h G \cap [x-h, x+h]^d$.
Il s'agit maintenant de résoudre un système linéaire de n équations à n inconnues, $n = card(G_h)$. On dispose pour ce faire de diverses méthodes numériques. On essaye en général de tirer profit de la remarque suivante : la matrice $n \times n$ du système linéaire est une matrice-bande, propriété qui est conséquence du caractère local de l'opérateur différentiel laplacien.
La méthode de discrétisation est intéressante parce qu'on dispose d'un résultat de convergence de la solution du problème discrétisé vers la solution du problème initial, lorsque h tend vers 0^+.

Stochastique

On utilise ici le processus W, mouvement brownien $d-$ dimesionnel, dont le générateur infinitésimal est, au facteur -1/2 près, le laplacien. On montre en utilisant la formule d'Ito que la solution du problème de Dirichlet sur G avec condition au bord φ est donnée par

$$(3) \qquad f(x) = \mathbb{E}(\varphi(X(\tau_G)))$$

o $X(t) = x + W(t)$ et $\tau_G = \min\{t \geq 0, \quad X(t) \in \partial G\}$ (le temps d'atteinte de la frontière ∂G.
Ici aussi on utilise couramment des méthodes de calcul numériques en partant d'une discrétisation de l'espace et en remplaçant le mouvement brownien par une marche aléatoire. Pour définir la marche aléatoire X_h partant de $x \in G_h$ (qui remplace le processus $X(t) = x + W(t)$ évoqué plus haut)

- on considère $(Y_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite indépendante et équidistribuée de vecteurs aléatoires telle que

$$\forall(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_d) \in \{-1, +1\}^d, \quad \mathbb{P}(Y_j = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_d) = \frac{1}{2d}$$

- on pose, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $X_h(k) = x + \sum_{j=1}^{k} Y_j$.

C'est la marche aléatoire symétrique aux plus proches voisins.
La fonction $x \mapsto \mathbb{E}(\varphi(X_h(\tau_{G_h})))$ o $\tau_{G_h} = \min\{k \geq 0, \quad X(t) \in \partial G_h\}$ est une solution approchée du problème de Dirichlet sur G avec condition au bord φ, elle converge vers la solution f donnée par (3) lorsque h tend vers 0^+.
Pour calculer cette solution approchée numériquement on utilise la loi des grands nombres, en répétant la simulation de marches aléatoires un grand nombre de fois (méthode de Monte Carlo). Noter que le nombre de variables indépendantes Y_j qu'il est nécessaire de simuler est toujours fini, puisqu'on arrte la marche aléatoire X_h dès qu'elle atteint la frontière de G. Ceci permet d'obtenir des solutions approchées en temps raisonnable.

7.2.3 Un extrait de sujet posé en concours CPGE

Rappels et notations

- L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique et de la norme associée $\|.\|_2$.
- $D(0,1)$ (respectivement $\bar{D}(0,1)$ et $C(0,1)$) désigne le disque ouvert de centre O de rayon 1 (respectivement le disque fermé de centre O de rayon 1 et le cercle de centre O et de rayon 1).
- On note Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est une application de classe C^2 sur louvert Ω, on rappelle que le laplacien de u est l' application $\Delta u = \partial_{1,1}u + \partial_{2,2}u$.
- Une application $v : \Omega \to R$ est dite harmonique (sur Ω) si v est de classe C^2 sur Ω avec $\Delta v(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in \Omega$.
- Pour $(x,y) \in D(0,1)$ fixé, on définit le nombre complexe $z = x + iy$ et on pose pour t réel

$$N(x,y,t) = \frac{1-|z|^2}{|z-e^{it}|^2} = \frac{1-(x^2+y^2)}{(x-\cos(t))^2 + (y-\sin(t))^2} \qquad \text{(quand l'expression a un sens)}$$

Problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$

Soit $f : C(0,1) \to \mathbb{R}$ une application continue. On appelle $\mathcal{D}_f$ l'ensemble des applications définies et continues sur $\bar{D}(0,1)$, harmoniques sur $D(0,1)$ et qui coïncident avec l'application f sur $C(0,1)$.
Le problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$ associé à f, consiste à rechercher les éléments de l'ensemble $\mathcal{D}_f$.
On définit en outre l'application

$$N_f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(x,y,t) f(\cos(t), \sin(t))\, dt$$

sur $D(0,1)$ et l'application $u(x,y) = \begin{cases} N_f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D(0,1) \\ f(x,y) & \text{si } (x,y) \in C(0,1) \end{cases}$ sur $\bar{D}(0,1)$.

1. a. Montrer que N_f admet une dérivée partielle $\partial_{1,1}N_f$ dordre 2 par rapport à x.
De même on peut montrer que N_f admet des dérivées partielles dordre 2 par rapport a toutes ses variables, continues sur $D(0,1)$. Ce résultat est admis pour la suite. Exprimer, pour tout $(x,y) \in D(0,1)$, pour tout $(i,j) \in \{1,2\}^2$, $\partial_{i,j}N_f(x,y)$ en fonction de $\partial_{i,j}N(x,y,t)$.

   b. En déduire que u est harmonique sur $D(0,1)$.

2. On fixe $t_0 \in [0,2\pi]$, $(x,y) \in D(0,1)$ et $\varepsilon > 0$. De plus, on note, pour tout réel $\delta > 0$:

$$I_0^\delta = \{t \in [0,2\pi]/\ \|(\cos(t),\sin(t)) - (\cos(t_0),\sin(t_0))\|_2 \leq \delta\}$$

   a. Montrer que I_0^δ est un intervalle ou bien la réunion de deux intervalles disjoints.

   b. Montrer l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que

$$\left| \int_{I_0^\delta} N(x,y,t)(f(\cos(t),\sin(t)) - f(\cos(t_0),\sin(t_0)))\, dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

   c. Soit $\delta > 0$ quelconque. Montrer que, si $t \in [0,2\pi] \setminus I_0^\delta$ et $\|(x,y) - (\cos(t_0),\sin(t_0))\| \leq \delta/2$, alors

$$|N(x,y,t)| \leq 4\frac{1-(x^2+y^2)}{\delta^2}$$

   d. En déduire que, pour tout $\delta > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que, si $\|(x,y) - (\cos(t_0),\sin(t_0))\|_2 \leq \eta$, alors

$$\left| \int_{t\in[0,2\pi]\setminus I_0^\delta} N(x,y,t)(f(\cos(t),\sin(t)) - f(\cos(t_0),\sin(t_0)))\, dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

3. Prouver que u est une application continue en tout point de $C(0,1)$. Conclusion?

4. (résumée) Montrer que si f est nulle sur $C(0,1)$ alors u est nulle sur $D(0,1)$. Conclusion?

7.2.4 Suggestions de développement

Ce paragraphe ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

Aspect mathématique

On peut s'intéresser à la démonstration des résultats théoriques présentés.
Pour les résultats d'existence / unicité on peut s'inspirer du sujet de concours inclus dans ce texte.
Pour l'utilisation de processus X comme le mouvement brownien (en temps continu) ou la marche aléatoire symétrique (en temps discret) on peut relier la propriété $(f(X_t))_t$ est une martingale et la propriété f harmonique.
La méthode numérique probabiliste s'appuie sur le temps d'atteinte de la frontière du domaine G. Il est sous entendu dans le texte qu'il est bien défini et à valeurs finies, presque srement. Comment prouver ces assertions?
Pour le résultat d'unicité de la solution du problème de Dirichlet ou pour l'étude des fonctions harmoniques, une méthode bien connue exploite le principe du maximum. Rappeler l'énoncé de ce principe et montrer comment il peut tre utilisé.

Aspect modélisation calcul numérique et algorithmique

Commenter les hypothèses du modèle. Quel modèle, quelles équations peut on proposer dans le cas o le solide possède des sources de chaleur internes?
La méthode numérique déterministe s'appuie sur la résolution de systèmes linéaires de grandes tailles. Quels sont algorithmes peuvent tre efficaces pour cet objectif et comment exploiter la propriété de la matrice des coefficients qui est une matrice bande?

Illustrer sur des exemples la rapidité de convergence de méthodes numériques pour la résolution de systèmes linéaires dans le cas de matrices bandes.
Simuler la marche aléatoire symétrique au plus proche voisin. On peut commencer par le cas de la dimension 1, i.e. le jeu de pile-face.
Utiliser cette simulation pour observer le temps d'atteinte fini de la frontière. Et aussi pour fournir une solution approchée du problème de Dirichlet.

7.3 Texte 3 de l'épreuve de modélisation

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

7.3.1 Introduction, modélisation de gestion de stock

Une entreprise qui vend un certain produit voudrait décider combien d'articles du produit devrait avoir en stock pour chacun des n prochains mois. Les intervalles de temps entre les instants de deux demandes successives sont des quantités positives, aléatoires indépendantes qui obéissent à une même loi de probabilités supposée exponentielle de moyenne $\lambda = 0.1$ mois. Les demandes sont des quantités aléatoires indépendantes qui obéissent à une même loi de probabilités sur $E = \{1, 2, 3, 4\}$. On suppose que cette loi, notée $(d(k))_{k \in E}$, est donnée par $d(1) = d(4) = 1/6$ et $d(2) = d(3) = 1/3$. Au début de chaque mois, l'entreprise vérifie le niveau I de son stock du produit et décide combien d'articles à commander auprès de son fournisseur. Si l'entreprise commande Z articles, elle encourt un coût $C = K + iZ$, où $K = 32\$$ est le coût d'installation et $i = 3\$$ est le coût incrémental par article commandé (si $Z = 0$, aucun coût n'est encouru). Quand une commande est formulée, le temps nécessaire pour qu'elle arrive à l'entreprise (temps de livraison) est uniformément distribué entre 0.5 et 1 mois.
L'entreprise adopte une stratérie, notée (s, S), pour alimenter son stock et décide une commande Z selon le schéma suivant:

$$Z = \begin{cases} S - I & \text{si} \quad I < s \\ 0 & \text{si} \quad I \geq s \end{cases}$$

où $(s, S) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ avec $s < S$.
Lorsqu'une demande D est formulée par un client, elle est immédiatement satisfaite si le niveau du stock I est supérieur ou égal à D (i.e. $I \geq D$). Si la demande D excède le niveau du stock I (i.e. $I < D$), l'excès $\Delta = D - I$ est mis en arriérée (en déficite) et sera satisfait par les livraisons futures. Dans le cas où $\Delta > 0$, le niveau du stock I devient théoriquement négatif ($I = -\Delta$). Lorsqu'une livraison est arrivée, elle est d'abord utilisée pour absorber les arriérées et ensuite, s'il en reste, elle alimente le stock.
Soit $I(t)$ le niveau du stock à l'instant t. Notons $I^+(t)$ et $I^-(t)$ les quantités $\max(I(t), 0)$ et $= \max(-I(t), 0)$ respectivement. Pour une période de n mois ($n \in \mathbb{N}^*$), considérons les quantités $A^+(n)$ et $A^-(n)$ définies par

$$A^+(n) = \frac{1}{n} \int_0^n I^+(t)dt \qquad \text{et} \qquad A^-(n) = \frac{1}{n} \int_0^n I^-(t)dt.$$

Supposons que l'entreprise encourt deux autres coûts: un coût de maintien noté m et un coût de l'arriérée noté a. Le coût $m = 1\$$, par article par mois, inclut la location du magasin (entrepot), l'assurance, la maintenance, etc. et le coût des arriérées, quand elles existent, $a = 5\$$ par article manquant par mois.

7.3.2 Données pour comparaison de stratégies de stock

Supposons qu'à l'instant 0, aucune demande n'est formulée et que $I(0) = 60$.
On simule le comportement du stock pour $n = 120$ mois et on compare le coût total moyen par mois CTM (somme des différents coûts moyens par mois) pour chacune des 9 stratégies de stockage données dans la table (**Table 1.**) suivante:

s	20	20	20	20	40	40	40	60	60
S	40	60	80	100	60	80	100	80	100

Table 1. Différentes stratégies (s, S)

7.3.3 Quelques outils probabilistes

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé dans lequel sont définies toutes les variables aléatoires considérées dans la modélisation proposée.

Définition

La densité de probabilité f d'une variable aléatoire réelle X qui obéit à une loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$ (notation: $X \sim Exp(\alpha)$) est définie par

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

où la notation $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A.
La fonction de répartition de cette loi exponentielle est donnée par

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = 1 - e^{-\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Théorème

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F continue. La variable aléatoire réelle Y définie par $Y = F(X)$ obéit à une loi de probabilité uniforme sur $]0, 1[$.

Inverse généralisé de F

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. La fonction inverse généralisée F^- de F est définie par:

$$F^-(u) = \inf\{x \in \mathbb{R}/F(x) \geq u\}, \quad u \in]0, 1[$$

Remarque

Si F est inversible, alors $F^- = F^{-1}$.

Exemples

1)$-$ Pour une variable aléatoire exponentielle $X \sim Exp(\alpha)$, nous avons

$$F^-(u) = F^{-1}(u) = \frac{-ln(1-u)}{\alpha}, \qquad u \in]0, 1[\tag{7.3.2}$$

2)$-$ Pour une variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$ de loi de probabilités discrète $p_k = \mathbb{P}(X = x_k),\ k = 1, 2, \ldots$, nous avons, pour une réalisation uniforme $u \in]0, 1[$,

$$(2) \begin{cases} \text{Si } u \leq p_1 & \text{alors} \quad F^-(u) = x_1 \\ \text{Sinon } F^-(u) = x_k & \text{telle que} \quad \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} p_i < u \leq \sum_{i=1}^{k} p_i \right) \end{cases}$$

7.3.4 Outils informatiques

La simulation Monte Carlo, d'un modèle aléatoire, utilise une suite $u_k,\ k = 1, 2, \cdots$, de réalisations de la loi uniforme sur $]0, 1[$. On **admet** qu'une telle suite peut être produite par une machine informatique par le biais d'une fonction dite générateur de nombres aléatoires. Par exemple, en langage C, l'appel de la fonction $rand()$ donne un nombre entier entre 1 et une grande constante entière positive $RAND\_MAX$, d'où la division $u = (float)rand()/RAND\_MAX$ donne un réel $u \in]0, 1[$ que l'on prend comme une réalisation de la loi uniforme sur $]0, 1[$. Généralement les langages informatiques dédiés au calcul scientifique sont dotés de générateurs de nombres aléatoires.

7.3.5 Suggestions de développement

Ce paragraphe ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

Aspect mathématique

1)– Proposer une preuve pour le théorème donné dans le paragraphe
"Quelques outils probabilistes".

2)– Déterminer le lien entre le paramètre λ défini dans la section I et le paramètre α défini dans la section III.

3)– Soit $t > 0$. Exprimer $I^+(t)$ en fonction des instants $t_k \in [0, t]$ et des demandes D_k formulées aux instants t_k.

4)– Que modélisent les quantités suivantes (quand elles existent):

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} A^+(n) \quad \text{et} \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} A^-(n).$$

5)– Expliciter la loi de probabilités du temps de livraison et discuter l'importance du support de cette loi.

Aspect enseignement

1)– Proposer d'autres types de coût et montrer comment peut-on les inclure dans le modèle proposé.

2)– Peut-on spécifier la loi de la demande en proposant par exemple une loi binômiale ou une loi de Poisson. Qu'est ce qu'on doit préciser dans le texte concernant chacune de ces deux lois proposées. Peut-on proposer une loi normale pour la demande?

3)– Discuter la possibilité de passer la commandea à tout instant voulu, au lieu que ça soit uniquement au début de chaque mois.

V.3 Aspect modélisation, calcul numérique et algorithmique

1)– Peut-on construire théoriquement une suite de nombres aléatoires ? (donner des ingrédients justifiant votre réponse).

2)– Proposer un procédé mathématique qui peut jouer le rôle d'un générateur de nombres aléatoires.

3)– Comment peut-on vérifier que l'algorithme suivant permet de générer une réalisation x de X dont la fonction de répartition est F:

Etape 1: générer u uniforme dans $]0, 1[$ (par un générateur de nombres aléatoires)
Etape 2: prendre $x = F^-(u)$

4)– Pour une stratégie $(s, S) = (30, 90)$, proposer une réalisation possible de $I(t)$, durant les 3 premiers mois, pendant laquelle figurent des arriérées en traçant les courbes de $I(t)$, $I^+(t)$ et $I^-(t)$.

5)– Interpréter les quantités $mA^+(n)$ et $aA^-(n)$.

6)− Comment réalise-t-on l'indépendance entre deux variables aléatoires dans un programme informatique.

7)− Justifier le fait qu'on peut remplaçer $ln(1-u)$ par $ln(u)$ dans la formule (7.3.2).

8) Ecrire un algorithme détaillé et clair qui permet de simuler le modèle aléatoire utilisé pour la gestion du stock de l'entreprise puis le traduire dans un langage de programmation (en C par exemple) que vous exécutez sur machine. L'algorithme doit aboutir à la comparaison des 9 stratégies proposées dans le tableau des données (**Table 1.**) en calculant toutes les quantités utiles à cette comparaison.
Vous présenter les résultats de l'execution dans des tableaux et/ou sous formes graphiques (les graphiques sont plus sollicités). Commentez les résultats obtenus.

Chapitre 8

Annexe A

8.1 Epreuve écrite de mathématiques

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

EAE MAT 1

SESSION 2016

AGRÉGATION
CONCOURS EXTERNE

Section : MATHÉMATIQUES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

A

Tournez la page S.V.P.

Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs et autres appareils électroniques similaires, ainsi que les documents sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc le candidat à produire des raisonnements clairs, complets et concis. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes ; il veillera toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

Notations.

On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs, $\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels. On note $\mathcal{M}_m(\mathbf{R})$ l'algèbre des matrices carrées de taille m à coefficients dans $\mathbf{R}$, $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille (m,p) à coefficients dans $\mathbf{R}$.

On considère E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $m \in \mathbf{N}^*$ et on note E^* son espace dual.

On notera I_m la matrice identité de $\mathcal{M}_m(\mathbf{R})$, et pour tout $M \in \mathcal{M}_m(\mathbf{R})$, on notera $P_M = \det(M - XI_m) \in \mathbf{R}[X]$ le polynôme caractéristique de la matrice M. Par ailleurs, on identifiera les éléments de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{R})$ et ceux de $\mathbf{R}^m$.

Pour $M \in \mathcal{M}_m(\mathbf{R})$, on désignera par ${}^tA$ la transposée de A. On notera $\mathcal{A}_m(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_m(\mathbf{R})$, $\mathcal{S}_m(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques, et $\mathcal{S}_m^{++}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives. De plus, $\mathrm{GL}_m(\mathbf{R})$ désignera le groupe linéaire des matrices à coefficients réels inversibles, et $\mathrm{O}(m) = \mathrm{O}_m(\mathbf{R})$ le groupe des matrices réelles orthogonales.

De même, pour $n \in \mathbf{N}^*$, dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on notera $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ le groupe des matrices à coefficients complexes inversibles, et $\mathrm{U}(n)$ celui des matrices complexes unitaires.

Dans tout le sujet, la matrice $J = J_n$ désignera la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$. On remarquera que J est antisymétrique et orthogonale.

Objectif du sujet.

Dans une première partie, on présentera les propriétés générales d'un espace vectoriel symplectique.

Dans une seconde partie, on étudiera les propriétés du groupe symplectique et de l'un de ses sous-groupes compacts.

La troisième partie sera consacrée à l'étude de sous-espaces vectoriels particuliers, appelés sous-espaces lagrangiens ; on regardera notamment l'action du groupe symplectique sur les triplets de sous-espaces lagrangiens deux à deux transverses et on définira un indice associé à ces triplets, invariant par cette action.

Dans la dernière partie, on introduira plusieurs indices de Maslov. Le premier est défini sur l'ensemble des chemins fermés dans $\mathrm{Sp}(2n)$, le second sur l'ensemble des chemins fermés dans l'espace des lagrangiens. Enfin, un dernier indice entre deux espaces lagrangiens est introduit ; et on conclut avec la formule de Leray qui fait le lien entre cet indice de Maslov et l'indice introduit dans la troisième partie.

I Espace vectoriel symplectique

On considère une forme bilinéaire $\omega : E \times E \to \mathbf{R}$.

Soit $e = (e_1, \dots, e_m)$ une base de E. On définit la matrice de la forme bilinéaire ω dans la base e comme étant la matrice $M = (\omega(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq m} \in \mathcal{M}_m(\mathbf{R})$.

1. Vérifier que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\omega(x, y) = {}^tXMY$, où X est le vecteur des coordonnées de x dans la base e et Y le vecteur des coordonnées de y dans la base e.

On dit que la forme bilinéaire ω est ***non dégénérée*** si $N_E = \{x \in E,\ \forall y \in E, \omega(x, y) = 0\}$ est réduit à $\{0_E\}$.

2. On note M la matrice d'une forme bilinéaire ω dans une base e. Démontrer l'équivalence entre :
   - la forme ω est non dégénérée
   - la matrice M est inversible.
   - $\forall f \in E^*,\ \exists! x \in E,\ \forall y \in E,\ \omega(x, y) = f(y)$.

Une ***forme symplectique*** sur E est une forme bilinéaire ω vérifiant les deux conditions suivantes :

- ω est antisymétrique : pour tout $(x, y) \in E^2$, $\omega(x, y) = -\omega(y, x)$,
- ω est non dégénérée.

3. *Modèle de* $\mathbf{R}^{2n}$ *:*
   On se place dans cette question sur l'espace vectoriel $E_0 = \mathbf{R}^{2n}$. On considère ω_0 la forme bilinéaire sur $E_0 \times E_0$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^{2n}$ est J. Montrer que ω_0 est une forme symplectique sur E_0.

Désormais, ω est une forme symplectique sur un espace vectoriel E de dimension finie.

Pour tout F sous-espace vectoriel de E, on définit l'orthogonal de F (pour la forme bilinéaire ω) : $F^\circ = \{x \in E,\ \forall y \in F,\ \omega(x, y) = 0\}$.

4. Montrer que pour tout F sous-espace vectoriel de E, F° est de dimension $\dim F^\circ = \dim E - \dim F$. A-t-on pour tout F sous-espace vectoriel de E, $F \oplus F^\circ = E$?

5. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que la restriction de ω à $F \times F$ est encore une forme symplectique si et seulement si $F \oplus F^\circ = E$.

6. *Lien entre structure symplectique et produit scalaire :*
   On se place sur un espace vectoriel réel E, de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle . | . \rangle$. Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, on notera u^* l'endomorphisme adjoint, c'est à dire, l'unique endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x) | y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle$.

   (a) Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$, un automorphisme de E vérifiant $u^* = -u$. Pour tout $(x, y) \in E^2$, on pose $\omega(x, y) = \langle x | u(y) \rangle$. Montrer que ω est alors une forme symplectique.

   (b) Réciproquement, soit ω une forme symplectique sur E. Expliquer qu'il existe un unique endomorphisme u de E tel que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\omega(x, y) = \langle x | u(y) \rangle$. Démontrer que $u^* = -u$ et que u est inversible. En déduire que m est pair.

(c) On reprend l'exemple de la question 3 et on munit E_0 du produit scalaire canonique. Montrer que pour tout $(x, y) \in E_0^2$, $\omega_0(x, y) = \langle x|Jy\rangle$ et $\langle x|y\rangle = \omega_0(Jx, y)$. Et expliquer que pour tout sous-espace vectoriel F, $F^\circ = JF^\perp$ (où $F^\perp$ désigne l'orthogonal pour le produit scalaire).

On considère désormais une forme symplectique ω fixée sur un espace E de dimension $m = 2n$.

7. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots e_n, f_1, \dots f_n)$ de E telle que pour tout $(i, j) \in [[1, n]]^2$,

$$\begin{cases} \omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0 \\ \omega(e_i, f_j) = \delta_{i,j} \end{cases}.$$

On pourra procéder par récurrence.

Dans une telle base $\mathcal{B}$, quelle est la matrice de la forme bilinéaire ω ?

Ainsi tout espace vectoriel symplectique peut se ramener (via un choix de base appropriée) au modèle (E_0, ω_0) défini à la question 3.

II Groupe symplectique réel

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est un ***endomorphisme symplectique*** s'il préserve ω, c'est-à-dire si pour tout $(x, y) \in E^2$, $\omega(u(x), u(y)) = \omega(x, y)$.

1. On considère une base adaptée $\mathcal{B}$ vérifiant les propriétés de la question **I**.7 et note $M = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. Montrer que u est un endomorphisme symplectique si et seulement si ${}^tMJM = J$.

On note $\mathrm{Sp}(2n)$ l'ensemble des ***matrices symplectiques réelles*** :

$$\mathrm{Sp}(2n) = \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R}) \,|\, {}^tMJM = J\}.$$

2. Montrer que $\mathrm{Sp}(2n)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbf{R})$ stable par la transposée.

3. Soit $M \in \mathrm{Sp}(2n)$. Montrer que pour toute racine complexe $\lambda \in \mathbf{C}$ du polynôme caractéristique P_M, $\overline{\lambda}$ et $\frac{1}{\lambda}$ sont également racines de P_M, avec la même multiplicité.

4. Soit $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$. Montrer l'équivalence entre
   - $M \in \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n)$
   - $M \in \mathrm{Sp}(2n)$ et $MJ = JM$
   - $M \in \mathrm{O}(2n)$ et $MJ = JM$.

On note $G = \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n)$.

5. Montrer que G est un sous-groupe compact de $\mathrm{O}(2n)$.

6. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on écrit $M = A + iB$ avec $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$. On lui associe alors $i_r(M) = M_r = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$.

(a) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $\det(M_r) = |\det(M)|^2$.

(b) Pour toute matrice $N \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$, montrer l'équivalence entre :
- $N \in G = \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n)$
- il existe $M \in \mathrm{U}(n)$ telle que $N = i_r(M)$.

(c) En déduire que i_r restreinte à $\mathrm{U}(n)$ définit un isomorphisme de groupes et un homéomorphisme de $\mathrm{U}(n)$ sur G.
On notera $i_c : G \to \mathrm{U}(n)$ la bijection réciproque.

Ainsi, en identifiant les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et leurs images par i_r, on écrit :

$$\mathrm{U}(n) == G = \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n).$$

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$ symétrique définie positive, on rappelle l'existence et l'unicité d'une matrice symétrique définie positive A telle que $A^2 = M$; on appellera A la racine carrée de M et on la notera $A = M^{\frac{1}{2}}$.

On rappelle également que pour tout $M \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbf{R})$, il existe un unique couple $(S, W) \in \mathcal{S}_{2n}^{++}(\mathbf{R}) \times \mathrm{O}(2n)$ tel que $M = SW$ avec $S = (M^tM)^{\frac{1}{2}}$ et $W = (M^tM)^{-\frac{1}{2}}M$. Cette décomposition est appelée décomposition polaire et l'application $M \mapsto (S, W)$ ainsi définie sur $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbf{R})$ est continue.

7. (a) Montrer que la racine carrée d'une matrice symplectique, symétrique, définie positive est encore une matrice symplectique. En déduire que pour tout $M \in \mathrm{Sp}(2n)$, si on note $M = SW$ sa décomposition polaire, alors S et W sont des matrices symplectiques.

   (b) Montrer que $\mathrm{Sp}(2n) \cap \mathcal{S}_{2n}^{++}(\mathbf{R})$ est connexe par arcs et en déduire que $\mathrm{Sp}(2n)$ est connexe par arcs. *On rappelle que* $\mathrm{U}(n)$ *est connexe par arcs.*

8. On souhaite décrire les sous-groupes compacts maximaux de $\mathrm{Sp}(2n)$. Pour cela, on considère H un sous-groupe compact de $\mathrm{Sp}(2n)$. On va démontrer qu'il est conjugué à un sous-groupe de G.

   On admet, dans cette question, l'existence sur le sous-groupe H d'une mesure borélienne finie non nulle, que l'on notera μ, invariante par translation, c'est-à-dire elle vérifie que pour tout borélien $B \subset H$, pour tout $g \in H$, $\mu(Bg) = \mu(B)$.

   (a) Pour tout $(x, y) \in E_0^2$, on pose

   $$\langle x|y\rangle_H = \frac{1}{\mu(H)} \int_H \langle gx|gy\rangle \, \mathrm{d}\mu(g).$$

   Expliquer que $\langle \cdot|\cdot\rangle_H$ définit un produit scalaire sur E_0 invariant par tous les éléments de H.

   (b) On note S la matrice dans la base canonique de ce produit scalaire. Expliquer que $S \in \mathcal{S}_{2n}^{++}$ et que pour tout $M \in H$, ${}^tMSM = S$.

   (c) Démontrer que l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $T = S^{-1}J$ est antisymétrique pour le produit scalaire $\langle .|.\rangle_H$ et que T commute avec tous les éléments de H.

   (d) Démontrer que l'endomorphisme associé à $-T^2$ est symétrique défini positif pour le produit scalaire $\langle .|.\rangle_H$. En déduire l'existence d'une matrice R telle que $R^2 = -T^2$ et ${}^tRS = SR$. Vérifier qu'elle commute avec tous les éléments de H et avec T.

   (e) En déduire l'existence d'une matrice $S_0 \in \mathcal{S}_{2n}^{++}$ symétrique, définie positive telle que $S_0 \in \mathrm{Sp}(2n)$ et pour tout $M \in H$, ${}^tMS_0M = S_0$.

(f) Conclure sur la nature des sous-groupes compacts maximaux de $\mathrm{Sp}(2n)$.

9. *Structure de sous-variété de* $\mathrm{Sp}(2n)$ *:*

   On considère l'application $\xi : \begin{cases} \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R}) & \to \mathcal{A}_{2n}(\mathbf{R}) \\ M & \mapsto {}^tMJM \end{cases}$.

   (a) Démontrer que ξ est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer la différentielle $\mathrm{d}\xi_{|M}$ en un point $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$.

   (b) Décrire le noyau de la différentielle $\mathrm{d}\xi_{|I_{2n}}$ et montrer que celle-ci est surjective de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$ sur $\mathcal{A}_{2n}(\mathbf{R})$.

   (c) Montrer que $\mathrm{Sp}(2n)$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$. Décrire l'espace tangent en I_{2n}, puis en tout point. Quelle est la dimension de $\mathrm{Sp}(2n)$?

III Espaces lagrangiens

Soit ω une forme symplectique fixée sur E.

On dit qu'un sous-espace vectoriel F est ***isotrope*** (*resp.* ***lagrangien***) si $F \subset F^\circ$ (*resp.* $F = F^\circ$).

1. Soit F un sous-espace vectoriel isotrope. Montrer l'équivalence entre :
   - F est lagrangien
   - F est isotrope maximal au sens de l'inclusion.
   - $\dim E = 2 \dim F$.

2. On dit que deux espaces lagrangiens L et L' sont transverses si $L \cap L' = \{0_E\}$. Expliquer que dans ce cas $L \oplus L' = E$. Démontrer que pour tout sous-espace lagrangien L, il existe un sous-espace lagrangien transverse L'.

3. Soient L et L' deux sous-espace lagrangiens transverses (on notera $2n = \dim E$).

   (a) Montrer que $\sigma_{L,L'} : \begin{cases} L & \to L'^* \\ x & \mapsto \sigma_{L,L'}(x) : \begin{cases} L' & \to \mathbf{R} \\ y & \mapsto \omega(x,y) \end{cases} \end{cases}$ est un isomorphisme de $\mathbf{R}$-espaces vectoriels.

   (b) Montrer qu'il existe, pour toute base $(e_1, \ldots, e_n)$ base de L, une base $(f_1, \ldots, f_n)$ base de L' qui vérifie : en notant $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n)$, $Mat_{\mathcal{B}}(\omega) = J$.

On se place sur $E_0 = \mathbf{R}^{2n}$ muni de la structure symplectique ω_0. On note $\mathcal{L}(n)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels lagrangiens de E_0.

4. Démontrer que $\begin{cases} \mathrm{Sp}(2n) \times \mathcal{L}(n) & \to \mathcal{L}(n) \\ (M, L) & \mapsto ML = \{Mx,\ x \in L\} \end{cases}$ définit une action du groupe $\mathrm{Sp}(2n)$ sur $\mathcal{L}(n)$. Expliquer que $\mathrm{Sp}(2n)$ agit transitivement sur les couples de lagrangiens transverses.

5. Soient L_1, L_2 et L_3 trois sous-espaces lagrangiens deux à deux transverses.

(a) Vérifier que $g_{L_1,L_2,L_3} = \sigma_{L_1,L_2} \circ \sigma_{L_1,L_3}^{-1} \circ \sigma_{L_2,L_3}$ est un isomorphisme de L_2 vers L_2^*.

(b) Démontrer qu'en posant pour tout $(x,y) \in L_2^2$, $g(x,y) = g_{L_1,L_2,L_3}(x)(y)$, on définit une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur L_2.
On pourra vérifier que pour tout $(x,y) \in L_2^2$, $g(x,y) = \omega_0(p_1(x), p_3(y))$ où p_1 et p_3 sont les projecteurs associés à la décomposition $E_0 = L_1 \oplus L_3$.

(c) En notant (r,s) la signature de cette forme g, on pose

$$\mathrm{sgn}(L_1, L_2, L_3) = r - s.$$

Vérifier que cette valeur est un entier compris entre $-n$ et n, de même parité que n, et montrer que toutes ces valeurs sont effectivement atteintes (pour des choix appropriés de L_1, L_2 et L_3).
On pourra prendre $L_1 = \mathbf{R}^n \times \{0_{\mathbf{R}^n}\}$, $L_3 = \{0_{\mathbf{R}^n}\} \times \mathbf{R}^n$ et choisir ensuite L_2 de manière appropriée.

6. L'action de groupe définie à la question 4 permet de faire agir $\mathrm{Sp}(2n)$ sur les triplets de sous-espaces lagrangiens (L_1, L_2, L_3) deux à deux transverses (en posant pour tout $M \in \mathrm{Sp}(2n)$, $M \cdot (L_1, L_2, L_3) = (ML_1, ML_2, ML_3)$). Montrer que l'orbite d'un tel triplet (L_1, L_2, L_3) par cette action est l'ensemble des (L_1', L_2', L_3') sous-espaces lagrangiens deux à deux transverses tels que $\mathrm{sgn}(L_1', L_2', L_3') = \mathrm{sgn}(L_1, L_2, L_3)$.

IV Indices de Maslov

Pour tout $M \in \mathrm{Sp}(2n)$, on pose $\rho(M) = \det\left(i_c((M^tM)^{-\frac{1}{2}}M)\right)$ (avec les notations de la partie **II**).

On rappelle que pour tout chemin continu γ d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C},\ |z| = 1\}$, il existe $\theta \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$ un relèvement de γ, c'est à dire une application vérifiant pour tout $t \in I$, $\gamma(t) = e^{2i\pi\theta(t)}$. De plus ce relèvement est unique à l'ajout d'une constante de $\mathbf{Z}$ près.

On dit qu'un chemin γ, défini sur un segment $[a,b]$, est fermé si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

1. Pour tout chemin $\Gamma : [0,1] \to \mathrm{Sp}(2n)$ continu et fermé, expliquer que $\gamma = \rho \circ \Gamma$ est un chemin continu et fermé de $[0,1]$ dans $\mathbf{U}$.

On considère θ un relèvement de γ et on définit l'**indice de Maslov** de Γ : $\mu(\Gamma) = \theta(1) - \theta(0)$.

2. Vérifier que $\mu(\Gamma) \in \mathbf{Z}$ et qu'il est indépendant du relèvement choisi.

3. Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, construire un chemin Γ_k continu, fermé de $[0,1]$ dans $\mathrm{Sp}(2n)$, d'indice $\mu(\Gamma_k) = k$.

4. Démontrer que $G = \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n)$ (isomorphe à $\mathrm{U}(n)$ d'après la question **II**.6) agit lui-aussi transitivement sur $\mathcal{L}(n)$ via l'action définie à la question **III**.4.

5. On note $L_0 = \mathbf{R}^n \times \{0\}$.
   (a) Expliquer que $L_0 \in \mathcal{L}(n)$ et caractériser le stabilisateur S_0 de L_0 par l'action de G ci-dessus. Expliquer que le groupe S_0 est isomorphe à $\mathrm{O}(n)$.
   (b) Montrer que pour tout $(U_1, U_2) \in \mathrm{U}(n)^2$, $i_r(U_1)L_0 = i_r(U_2)L_0$ si et seulement si $U_1{}^tU_1 = U_2{}^tU_2$.

Ainsi, pour tout sous-espace lagrangien L, la quantité $\Lambda_L = U^tU$, où $L = i_r(U)L_0$, ne dépend que de L et pas du choix de U.

6. Pour tout $L \in \mathcal{L}(n)$, on pose $\xi(L) = \det(\Lambda_L)$. Expliquer que pour tout $U \in \mathrm{U}(n)$ tel que $L = i_r(U)L_0$, $\xi(L) = \det(U^2)$ et que $\xi(L) \in \mathbf{U}$.

D'après la question 5a on dispose d'un isomorphisme naturel entre $\mathcal{L}(n)$ et $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$. Cela nous permet de munir $\mathcal{L}(n)$ d'une topologie et de définir ce qu'est un chemin continu Γ dans l'espace $\mathcal{L}(n)$: c'est la donnée d'une application continue V de $[0,1]$ dans $\mathrm{U}(n)$, telle que pour tout $t \in [0,1]$, $\Gamma(t) = i_r(V(t))L_0$.

7. Soit Γ est un chemin continu fermé de $[0,1]$ dans l'espace $\mathcal{L}(n)$; avec les notations ci-dessus, il vérifie : $\Gamma(0) = i_r(V(0))L_0 = i_r(V(1))L_0 = \Gamma(1)$.
   On considère θ un relèvement de l'application continue $\xi \circ \Gamma : [0,1] \mapsto \mathbf{U}$. On définit l'indice de Maslov de Γ par : $\mu_{\mathcal{L}}(\Gamma) = \theta(1) - \theta(0)$.
   Montrer que si Γ est un chemin fermé dans l'espace $\mathcal{L}(n)$ et γ un chemin fermé dans G, alors $\mu_{\mathcal{L}}(\gamma\Gamma) = \mu_{\mathcal{L}}(\Gamma) + 2\mu(\gamma)$.

8. Montrer que $\mu_{\mathcal{L}}$ est surjectif de l'ensemble des chemins fermés de $\mathcal{L}(n)$ dans $\mathbf{Z}$.

9. Montrer qu'un lagrangien L est transverse à L_0 si et seulement si (avec les notations ci-dessus) $\Lambda_L - I_n$ est inversible. Plus généralement, montrer que deux lagrangiens L et L' sont transverses si et seulement si $\Lambda_L - \Lambda_{L'}$ est inversible.

On note $\widehat{\mathcal{L}(n)}$ l'ensemble des couples (L, θ) avec $L \in \mathcal{L}(n)$ sous-espace lagrangien, et $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $\xi(L) = \mathrm{e}^{i\theta}$. (On le munit de la topologie produit).

Pour tous couples (L, θ) et (L', θ') de $\widehat{\mathcal{L}(n)}$, avec L et L' sous-espaces lagrangiens transverses, on définit l'indice de Maslov par :

$$m\left((L,\theta),(L',\theta')\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\theta' - \theta\right) + \frac{i}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\log(\lambda_j),$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les n valeurs propres avec multiplicité de la matrice $-\Lambda_{L'}\Lambda_L^{-1}$, et où log désigne la détermination principale du logarithme sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$.

10. Expliquer que, pour tous sous-espaces lagrangiens transverses L et L', $m((L,\theta),(L',\theta'))$ est bien défini et $\mathrm{e}^{2i\pi m((L,\theta),(L',\theta'))} = \mathrm{e}^{in\pi}$. En déduire que $m((L,\theta),(L',\theta')) \in \mathbf{Z}$ si n est pair, et $\mathbf{Z} + \frac{1}{2}$ si n est impair.

11. Pour tout $M \in G$, et pour $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\det(i_c(M)) = \mathrm{e}^{i\alpha}$, on pose $M_\alpha = (M, \alpha)$. Pour tout $(L, \theta) \in \widehat{\mathcal{L}(n)}$, on définit $M_\alpha.(L,\theta) = (ML, \theta + 2\alpha)$.

    Expliquer que pour tout (L,θ) et (L',θ') dans $\widehat{\mathcal{L}(n)}$, avec L et L' sous-espaces lagrangiens transverses, on peut définir $m\left(M_\alpha.(L,\theta), M_{\alpha'}.(L',\theta')\right)$. Puis démontrer que pour tout $M \in G$, $m\left(M_\alpha.(L,\theta), M_\alpha.(L',\theta')\right) = m\left((L,\theta),(L',\theta')\right)$.

12. Pour tout triplet (L_1, L_2, L_3) de sous-espaces lagrangiens deux à deux transverses, vérifier que la quantité $m((L_1,\theta_1),(L_2,\theta_2)) + m((L_2,\theta_2),(L_3,\theta_3)) + m((L_3,\theta_3),(L_1,\theta_1))$ est indépendante des angles $(\theta_j)_{1\leq j\leq 3}$. On la note $C(L_1, L_2, L_3)$.

    Expliquer que cette quantité est invariante par l'action de G sur les triplets de sous-espaces lagrangiens deux à deux transverses.

13. En admettant la continuité de C, généraliser ce résultat d'invariance à l'action des matrices $M \in \mathrm{Sp}(2n)$.

14. Montrer que pour tout triplet (L_1, L_2, L_3) de sous-espaces lagrangiens deux à deux transverses, on a :

$$C(L_1, L_2, L_3) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(L_1, L_2, L_3).$$

Commentaires finals : Les résultats de la deuxième partie permettent de montrer (en utilisant que $\mathrm{Sp}(2n) \cap \mathcal{S}_{2n}^{++}(\mathbf{R})$ est contractile) que le groupe fondamental de $\mathrm{Sp}(2n)$ est le même que celui de G, et donc celui de $\mathrm{U}(n)$, c'est-à-dire $\mathbf{Z}$. Le premier indice de Maslov construit dans la quatrième partie donne un isomorphisme explicite entre ce groupe fondamental $\pi_1(\mathrm{Sp}(2n))$ et $\mathbf{Z}$.
D'après la formule de Leray démontrée ci-dessus, $\frac{1}{2}\mathrm{sgn}$ apparaît comme le cobord de l'indice de Maslov m. Cette formule (combinée avec l'antisymétrie de m) permet de démontrer l'antisymétrie de sgn et la formule cohomologique :

$$\mathrm{sgn}(L_1, L_2, L_3) + \mathrm{sgn}(L_0, L_1, L_3) + \mathrm{sgn}(L_0, L_2, L_1) = \mathrm{sgn}(L_0, L_2, L_3).$$

8.2 Epreuve écrite d'analyse et de probabilité

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

EAE MAT 2

SESSION 2016

AGRÉGATION
CONCOURS EXTERNE

Section : MATHÉMATIQUES

COMPOSITION D'ANALYSE ET PROBABILITÉS

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

A

Tournez la page S.V.P.

Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs et autres appareils électroniques similaires, ainsi que les documents sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc le candidat à produire des raisonnements clairs, complets et concis. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes ; il veillera toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

Notations.

On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{Q}$ le corps des nombres rationnels, $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels, Ω le segment $[0,1] \subset \mathbf{R}$ et $\Omega' = \Omega \setminus \mathbf{Q}$, l'ensemble des réels irrationnels de l'intervalle $[0,1]$.

Étant donné un nombre réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

On définit l'application $T : \Omega \to \Omega$ par

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \text{ si } x \in]0,1] \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $T^n = \underbrace{T \circ T \ldots \circ T}_{n \text{ fois}}$, avec par convention $T^0 = \mathrm{Id}_\Omega$ et $T^1 = T$.

Étant donné une suite de réels strictement positifs $(a_n)_{n \geq 1}$, on pose

$$[0; a_1] = \frac{1}{a_1}$$

et

$$[0; a_1, a_2, \ldots, a_k] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_k}}}} \text{ pour } k \geq 2,$$

et on note $\psi_{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ la fonction homographique de Ω vers $\mathbf{R}$ définie par

$$\psi_{a_1, a_2, \ldots, a_n}(t) = [0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n + t] \text{ pour } t \in \Omega.$$

Étant donné quatre réels a, b, c, d, si f désigne la fonction homographique définie par

$$f(t) = \frac{at + b}{ct + d}$$

nous écrirons également en utilisant une notation matricielle,

$$f(t) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(t).$$

On rappelle que pour deux fonctions homographiques données,

$$f(t) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(t) \text{ et } g(t) = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}(t)$$

on a

$$(f \circ g)(t) = M(t),$$

avec M le produit matriciel dans l'algèbre $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

Nous noterons λ la mesure de Lebesgue définie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}$ de Ω et nous écrirons simplement *fonction mesurable* pour fonction numérique définie sur Ω et $\mathcal{B}$-mesurable.

On note $L^1(\Omega, \mathcal{B}, \lambda)$ pour désigner l'ensemble (des classes) de fonctions mesurables dont la valeur absolue est intégrable sur Ω pour la mesure λ. S'il n'y a pas d'ambiguité sur la mesure on notera tout simplement $L^1(\Omega)$.

Enfin, on rappelle la propriété de régularité de la mesure de Lebesgue : pour tout $B \in \mathcal{B}$, on a

$$\lambda(B) = \inf_{O \text{ ouvert de } \Omega,\ B \subset O} \lambda(O)$$

et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F de Ω et un ouvert O de Ω vérifiant

$$F \subset B \subset O \text{ et } \lambda(O \cap F^c) < \varepsilon.$$

Objectif du sujet.

Le sujet a pour but de définir le développement en fraction continuée d'un réel irrationnel de l'intervalle $[0,1]$ (partie **I**), d'établir certains résultats de régularité « en moyenne » de ce développement et d'obtenir des estimations quantitatives de sa vitesse de convergence, dus à Khintchine et Lévy (partie **IV**). Pour y parvenir, les outils essentiels sont le théorème ergodique de Birkhoff, établi à la partie **II**, ainsi que l'étude d'une mesure possédant des propriétés d'invariance et d'ergodicité remarquables (partie **III**).

Dépendance des parties entre elles. Les parties **I**, **II** sont indépendantes entre elles ainsi que la section **III.1**. La section **III.2** utilise les résultats de la partie **I**. Enfin, la partie **IV** utilise les trois parties précédentes.

I Résultats préliminaires

Développement en fraction continuée d'un réel irrationnel.

Soit $x \in \Omega'$.

1. Montrer que
$$x = \frac{1}{a_1(x) + T(x)}$$
où $a_1(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.
2. En déduire l'existence d'une unique suite d'entiers strictement positifs $(a_n(x))_{n \geq 1}$ vérifiant, pour tout entier $n \geq 1$:
$$\begin{aligned} x &= \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_2(x) + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n(x) + T^n(x)}}}} \\ &= \psi_{a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)}(T^n(x)), \end{aligned}$$

Tournez la page S.V.P.

avec

$$a_j(x) = a_1(T^{j-1}(x)) = \left\lfloor \frac{1}{T^{j-1}(x)} \right\rfloor \text{ pour } j \geq 2.$$

On définit les suites $(p_n(x))_{n\geq 0}$ et $(q_n(x))_{n\geq 0}$ par

$$\begin{cases} p_0(x) = 0,\ p_1(x) = 1, \\ q_0(x) = 1,\ q_1(x) = a_1(x), \end{cases}$$

et, pour $n \geq 2$:

$$\begin{cases} p_n(x) = a_n(x)p_{n-1}(x) + p_{n-2}(x) \\ q_n(x) = a_n(x)q_{n-1}(x) + q_{n-2}(x). \end{cases}$$

3. Établir les identités, valables pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_2(x) \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1}(x) & p_n(x) \\ q_{n-1}(x) & q_n(x) \end{pmatrix}$$

et

$$\frac{p_n(x)}{q_n(x)} = [0; a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)].$$

4. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,

$$q_n(x)p_{n-1}(x) - p_n(x)q_{n-1}(x) = (-1)^n.$$

Montrer par ailleurs que $q_n(x) \geq 2^{\frac{n-1}{2}}$.

5. Montrer que pour $n \geq 0$, on a $\frac{p_{2n}(x)}{q_{2n}(x)} < x < \frac{p_{2n+1}(x)}{q_{2n+1}(x)}$.

6. En déduire que pour tout $n \geq 1$,

$$\left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right| \leq \frac{1}{q_n(x)q_{n+1}(x)},$$

et conclure sur la limite de la suite $\left(\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right)_{n\geq 0}$.

Calcul de trois intégrales.

7. Démontrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

8. On considère la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $2\pi-$périodique, et telle que

$$f(t) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{t^2}{4} \text{ pour } t \in]-\pi, \pi].$$

   (a) Déterminer la série de Fourier de f et étudier sa convergence.

   (b) En déduire que

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\, \mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{12}.$$

9. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor\right)}{1+x}\, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(k) \ln\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right).$$

10. On rappelle (et on ne demande pas de le redémontrer) qu'il existe un réel γ (constante d'Euler) tel que

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n) \to \gamma \text{ quand } n \to +\infty.$$

Montrer que l'application T est mesurable et que

$$\int_{\Omega} T(x)\ \mathrm{d}x = 1-\gamma.$$

II Théorème de Birkhoff

Dans cette partie, μ désigne une mesure de probabilité quelconque définie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}$ de $\Omega = [0,1]$, et $U : \Omega \to \Omega$ une application $\mathcal{B}$-mesurable quelconque. L'expression « presque partout » est relative à la mesure μ.

On suppose de plus, dans toute cette partie, que U et μ vérifient les deux conditions suivantes :

(i) Pour toute fonction $f \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, on a $f \circ U \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ et

$$\int_{\Omega} f \circ U\ \mathrm{d}\mu = \int_{\Omega} f\ \mathrm{d}\mu.$$

On dit alors que μ est *invariante par* U.

(ii) Toute fonction $\mathcal{B}$-mesurable $f : \Omega \to \mathbf{R}$, telle que $f \circ U = f$, est égale presque partout à une constante.

On dit alors que U est μ-*ergodique*.

Soit $f : \Omega \to \mathbf{R}$ une **fonction positive** et μ-intégrable. On pose

$$f_0 = 0 \text{ et } f_n = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ U^k \text{ pour } n \geq 1,$$

où U^k désigne la composée k fois de l'application U.

Soit $g : \Omega \to \mathbf{R}$ une fonction μ-intégrable. Avec la convention $\sum_{i=0}^{n-1} g \circ U^i = 0$ pour $n = 0$, on introduit les fonctions définies sur Ω :

$$v = \sup_{n \in \mathbf{N}} \left(f_n - \sum_{i=0}^{n-1} g \circ U^i \right)$$

et pour tout entier $n \geq 1$ et j tel que $0 \leq j < n$:

$$v_j^n = \max_{j \leq \ell \leq n} \left(f_\ell - f_j - \sum_{i=j}^{\ell-1} g \circ U^i \right).$$

(On prendra comme convention $\sum_{i=j}^{j-1} \cdots = 0$.)

Tournez la page S.V.P.

Un lemme de Riesz.

Soit un entier $n \geq 1$ et $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des réels. On pose, pour tout entier j tel que $0 \leq j < n$:

$$v_j = \max\Big(0, u_{j+1}, u_{j+1} + u_{j+2}, \ldots, u_{j+1} + \ldots + u_n\Big)$$

et on pose également $v_n = 0$.

1. Pour tout réel x, on pose $x^+ = \max(x, 0)$. Montrer que pour tout entier j tel que $0 \leq j < n$, on a

$$v_j = (v_{j+1} + u_{j+1})^+$$

2. En déduire que, pour ces mêmes j, on a

$$v_j \leq v_{j+1} + u_{j+1}\mathbf{1}_{\{v_j > 0\}},$$

où la constante $\mathbf{1}_{\{v_j>0\}}$ est définie par

$$\mathbf{1}_{\{v_j>0\}} = \begin{cases} 1 \text{ si } v_j > 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

3. En conclure que

$$\sum_{j=0}^{n-1} u_{j+1}\mathbf{1}_{\{v_j>0\}} \geq 0.$$

Inégalité Maximale

4. En utilisant le lemme de Riesz, montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \Big(f_{j+1} - f_j - g \circ U^j\Big)\mathbf{1}_{\{v_j^n>0\}} \geq 0,$$

où la fonction $\mathbf{1}_{\{v_j^n>0\}}$ est définie par

$$\mathbf{1}_{\{v_j^n>0\}}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } v_j^n(x) > 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

5. En déduire que

$$f_n \geq \sum_{j=0}^{n-1}(g \circ U^j)\mathbf{1}_{\{v_j^n>0\}}$$

6. Montrer que

$$v_j^n = v_0^{n-j} \circ U^j,$$

et en déduire que

$$f_n \geq \sum_{j=0}^{n-1}\Big(g\mathbf{1}_{\{v_0^{n-j}>0\}}\Big) \circ U^j$$

7. En déduire l'inégalité, dite *l'Inégalité Maximale,*

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_{\{v>0\}} g \, \mathrm{d}\mu.$$

Preuve du théorème de Birkhoff

8. Soit $f^* = \limsup \frac{1}{n} f_n$. Montrer que la fonction f^* est presque partout égale à une constante (éventuellement infinie).
   On pourra utiliser la fonction $\arctan(f^*)$.

Par abus de notation, on notera dans la suite de cette partie, cette constante f^*.

9. Soit g une constante strictement inférieure à f^*. On pose (par abus on note g la fonction constante égale à g).
$$v = \sup_{n \in \mathbf{N}} \left(f_n - \sum_{i=0}^{n-1} g \circ U^i \right).$$
   Montrer que la fonction v est strictement positive presque partout, et en déduire que
$$f^* \leq \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu.$$

10. Pour tout entier $N \geq 1$, on pose
$$\overline{f}_N = N - (N - f)^+.$$
   (a) Montrer que $0 \leq \overline{f}_N \leq f$ et que
$$\liminf \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ U^i \geq N - \limsup \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (N - f)^+ \circ U^i$$
   (b) Montrer que
$$\liminf \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ U^i \geq \int_\Omega \overline{f}_N \, \mathrm{d}\mu \text{ presque partout.}$$
   (c) En déduire que
$$\liminf \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ U^i \geq \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \text{ presque partout,}$$
   puis que
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ U^i = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \text{ presque partout.}$$

11. En déduire le **théorème de Birkhoff** : pour toute fonction $f \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$,
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ U^i = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \text{ presque partout.}$$

III Propriétés de l'opérateur T

Jusqu'à la fin du problème, la lettre T désigne la fonction définie dans le préambule, c'est-à-dire $T : \Omega \to \Omega$ définie par
$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \text{ si } x \in]0,1] \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

On note $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de $\Omega = [0,1]$, λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}$, et μ l'application définie sur $\mathcal{B}$ par
$$\mu(A) = \frac{1}{\ln(2)} \int_A \frac{1}{1+x} \, \mathrm{d}x \text{ pour tout } A \in \mathcal{B}.$$

III.1 Invariance de la mesure μ par T

La mesure de Gauss

1. Démontrer que μ est une mesure de probabilité sur Ω (appelée mesure de Gauss).

2. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{B}$
$$\frac{\lambda(A)}{2\ln 2} \leq \mu(A) \leq \frac{\lambda(A)}{\ln 2}. \tag{1}$$

3. Soit $f : \Omega \to \mathbf{R}$ une fonction mesurable. Montrer que $f \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \lambda)$ si, et seulement si, $f \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$.

4. Soit α un réel fixé tel que $0 \leq \alpha < 1$. Montrer que
$$T^{-1}([0,\alpha]) = \{0\} \cup \bigcup_{k\geq 1} \left[\frac{1}{k+\alpha}, \frac{1}{k}\right]$$

5. Montrer que pour tout réel $\alpha \in [0,1[$,
$$\mu(T^{-1}([0,\alpha])) = \mu([0,\alpha])$$
et en déduire que pour tous réels α et β tels que $0 \leq \alpha < \beta < 1$, on a
$$\mu(T^{-1}(]\alpha,\beta[)) = \mu(]\alpha,\beta[).$$

6. Montrer que tout ouvert de Ω est réunion dénombrable d'intervalles ouverts dans Ω et deux à deux disjoints.

7. En déduire que pour tout ouvert O de Ω et tout fermé F de Ω, on a
$$\mu(T^{-1}(O)) = \mu(O) \quad \text{et} \quad \mu(T^{-1}(F)) = \mu(F).$$

8. Soit $A \in \mathcal{B}$.
   (a) Montrer que quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F et un ouvert O de Ω tels que $F \subset A \subset O$ et $\mu(O \cap F^c) < \varepsilon$.
   (b) En déduire que $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$.

9. Montrer que
$$\int_\Omega \mathbf{1}_A \circ T \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mathbf{1}_A \, \mathrm{d}\mu = \mu(A) \text{ pour tout } A \in \mathcal{B},$$
où $\mathbf{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de A.

10. En déduire que μ est invariante par T, c'est à dire pour tout $f \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$,
$$\int_\Omega f \circ T \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu.$$
On pourra commencer par établir l'égalité pour $f \geq 0$.

III.2 Ergodicité de T

On reprend les notations de la partie **I**

Intervalles fondamentaux.

Soit n un entier ≥ 1 et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des entiers strictement positifs fixés. On pose

$$\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \{x \in \Omega' \ / \ a_1(x) = a_1, a_2(x) = a_2, \ldots, a_n(x) = a_n\}.$$

L'ensemble $\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est appelé **intervalle fondamental** d'ordre n.

1. Montrer que pour tout $t \in \Omega$ et pour tout $x \in \Omega'$

$$\psi_{a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)}(t) = \frac{tp_{n-1}(x) + p_n(x)}{tq_{n-1}(x) + q_n(x)}.$$

2. Montrer que $\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est l'intersection de Ω' et d'un intervalle de $\mathbf{R}$ dont on précisera les extrémités en fonction des entiers $p_{n-1}(x)$, $q_{n-1}(x)$, $p_n(x)$ et $q_n(x)$ (pour $x \in \Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)$).

3. En déduire que $\lambda(\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Inégalité de sous-mélange.

Soit $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{B}$ et $h : \Omega \to \Omega$ une application mesurable vérifiant pour tout ouvert O

$$\alpha\lambda(O)\lambda(A) \leq \lambda(h^{-1}(O) \cap A).$$

On suppose de plus que la mesure de Gauss μ est h-invariante.

4. Soit $B \in \mathcal{B}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert O, $B \subset O$, tel que

$$\alpha\lambda(O)\lambda(A) \leq \varepsilon + \lambda(h^{-1}(B) \cap A).$$

On pourra utiliser l'encadrement de la question ***III.1.2****, la question* ***III.1.8*** *et la régularité de la mesure de Lebesgue rappelée en préambule.*

5. En déduire que pour tout $B \in \mathcal{B}$

$$\alpha\lambda(B)\lambda(A) \leq \lambda(h^{-1}(B) \cap A).$$

Soit $A \in \mathcal{B}$ *invariant* par T, c'est à dire tel que $T^{-1}(A) = A$. Soit également n un entier ≥ 1 et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des entiers strictement positifs fixés. On pose pour simplifier,

$$\Delta_n = \Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ et } \psi_n = \psi_{a_1, a_2, \ldots, a_n}.$$

6. Soient u, v deux réels tels que $0 \leq u < v \leq 1$. Montrer que

$$\frac{\lambda(\ T^{-n}(]u, v[) \cap \Delta_n)}{\lambda(\Delta_n)} = \frac{\psi_n(v) - \psi_n(u)}{\psi_n(1) - \psi_n(0)} = (v - u)\frac{q_n(q_n + q_{n-1})}{(q_n + uq_{n-1})(q_n + vq_{n-1})}$$

et en déduire que

$$\frac{1}{2}\lambda(]u, v[) \leq \frac{\lambda(T^{-n}(]u, v[) \cap \Delta_n)}{\lambda(\Delta_n)}.$$

7. En déduire que pour tout ouvert O de Ω :

$$\frac{1}{2}\lambda(O)\lambda(\Delta_n) \leq \lambda(T^{-n}(O) \cap \Delta_n).$$

8. En conclure que pour tout intervalle fondamental Δ_n,

$$\frac{1}{2}\lambda(A)\lambda(\Delta_n) \leq \lambda(A \cap \Delta_n).$$

9. Montrer pour tout ouvert O de Ω :

$$\frac{1}{2}\lambda(A)\lambda(O) \leq \lambda(A \cap O).$$

10. En déduire que pour tout $B \in \mathcal{B}$:

$$\frac{1}{2}\lambda(A)\lambda(B) \leq \lambda(A \cap B).$$

11. En conclure que

$$\mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1.$$

12. Soit $f : \Omega \to \mathbf{R}$ une fonction mesurable telle que $f \circ T = f$. Pour $t \in \mathbf{R}$, on pose

$$A_t = \{x \in \Omega \ / \ f(x) \in]-\infty, t[\}$$

et

$$B_t = \{x \in \Omega \ / \ f(x) \in]t, +\infty[\}.$$

   (a) Montrer que pour $t \in \mathbf{R}$, $\mu(A_t)$ et $\mu(B_t)$ valent 0 ou 1.
   (b) Montrer qu'il existe t_0 tel que $\mu(A_{t_0}) = 0$.
   (c) Justifier l'existence dans $\mathbf{R}$ de $s = \sup\{t \in \mathbf{R} / \ \mu(A_t) = 0\}$, et montrer que $\mu(A_s) = 0$.
   (d) Que vaut $\mu(B_s) = 0$?
   (e) Conclure que T est μ-ergodique.

IV Applications du théorème de Birkhoff

Dans cette partie, on conserve les notations de la partie **III**. L'expression « presque tout » est relative à la mesure de Lebesgue λ (ou de façon équivalente à la mesure μ).

1. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i(x)\right)_{n\geq 1}$ converge pour presque tout $x \in \Omega$, vers une limite que l'on déterminera.

2. **Théorème de A. Khintchine (1935).**

   Montrer que, pour presque tout $x \in \Omega$,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1(x)a_2(x)\ldots a_n(x)} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right)^{\log_2 k}$$

3. **Théorèmes de P. Lévy (1936).**

   (a) Montrer que pour tout $x \in \Omega'$ et tout $n \geq 1$, on a

$$x = \frac{p_n(x) + T^n(x)\ p_{n-1}(x)}{q_n(x) + T^n(x)\ q_{n-1}(x)}.$$

(b) Montrer que pour tout $x \in \Omega'$ et tout $n \geq 1$, on a

$$q_n(x)x - p_n(x) = (-1)^n \prod_{k=0}^{n} T^k(x).$$

(c) En déduire que, pour presque tout $x \in \Omega$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(|q_n(x)x - p_n(x)|) = -\frac{\pi^2}{12 \ln 2}.$$

(d) Montrer que pour tout $x \in \Omega'$ on a $\frac{1}{2} \leq q_n(x)\,|q_{n-1}(x)x - p_{n-1}(x)| \leq 1$. En déduire que pour presque tout $x \in \Omega$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(q_n(x)) = \frac{\pi^2}{12 \ln 2}$$

puis que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\left|x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right|\right) = -\frac{\pi^2}{6 \ln 2}.$$

Bibliographie

[1] ABELSON H. SUSSMAN G. J. SUSSMAN J. Structure and interpretation of computer programs MIT PRESS

[2] AEBISCHER B L2 Analyse fonctions de plusieurs variables et géométrie analytique VUIBERT

[3] AEBISCHER B. L3 Géométrie VUIBERT

[4] AHUÉS M. CHATELIN F. Exercices de valeurs propres de matrices MASSON

[5] L. Collectif Cours et exercices dinformatique VUIBERT

[6] ALDON G. Mathématiques dynamiques HACHETTE

[7] ALESSANDRIM. Thèmes de géométrie DUNOD

[8] ALLAIRE G Analyse numérique et optimisation Ecole polytechnique

[9] ALLOUCHE J. P. SHALLIT J. Automatic sequences theory, applications, Generalizations CAMBRIDGE

[10] AMAR E. MATHERON É. Analyse complexe CASSINI

[11] ANDLERM. BLOCH J. D. MAILLARD B. Exercices corrigés de Mathématiques
Tome 1A - Topologie
Tome 1B - Fonctions numériques
Tome 2 - Suites et séries numériques
Tome 3 - Analyse fonctionnelle
Tome 5 - Algèbre générale, polynômes
Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie
Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie ELLIPSES

[12] ANDREWS G. Number Theory DOVER

[13] APPLE A.W. Modern compiler implementation in C in Java in ML CAMBRIGDE

[14] ARIBAUD F. VAUTHIER J. Mathématiques. Première année de DEUG ESKA

[15] ARNAUDIES J-M. BERTIN J. Groupes, Algèbres et Géométrie
Tome I
Tome II ELLIPSES

[16] ARNAUDIES J-M. DELEZOIDE P. FRAYSSE H. Exercices résolus danalyse DUNOD

[17] ARNAUDIES J-M. DELEZOIDE P. FRAYSSE H. Exercices résolus dalgèbre bilinéaire et géométrie du cours deMathématiques tome 4 DUNOD

[18] ARNAUDIES J-M. FRAYSSE H. Cours deMathématiques
1. Algèbre
2. Analyse
3. Compléments danalyse
4. Algèbre bilinéaire et géométrie DUNOD

[19] ARNOLD V. Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires MIR

[20] ARNOLD V. Équations différentielles ordinaires MIR

[21] ARNOLD V. lectures on partial differential equations SPINGER SPINGER

[22] ARNOLD A. Mathématiques pour linformatique EDISCIENCES

[23] AEBISCHER B. L3 Géométrie VUIBERT

[24] AHUÉS M. CHATELIN F. Exercices de valeurs propres de matrices MASSON

[25] ALBERT L. Collectif Cours et exercices dinformatique VUIBERT

[26] ALDON G. Mathématiques dynamiques HACHETTE

[27] ALESSANDRIM. Thèmes de géométrie DUNOD

[28] ALLAIRE G Analyse numérique et optimisation Ecole polytechnique

[29] ALLOUCHE J. P. SHALLIT J. Automatic sequences theory, applications, Generalizations CAMBRIDGE

[30] AMAR E. MATHERON É. Analyse complexe CASSINI

[31] ANDLERM. BLOCH J. D. MAILLARD B. Exercices corrigés de Mathématiques
Tome 1A - Topologie
Tome 1B - Fonctions numériques
Tome 2 - Suites et séries numériques
Tome 3 - Analyse fonctionnelle
Tome 5 - Algèbre générale, polynômes
Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie
Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie ELLIPSES

[32] ANDREWS G. Number Theory DOVER

[33] APPLE A.W. Modern compiler implementation in C in Java in ML CAMBRIGDE

[34] ARIBAUD F. VAUTHIER J. Mathématiques. Première année de DEUG ESKA

[35] ARNAUDIES J-M. BERTIN J. Groupes, Algèbres et Géométrie Tome I
Tome II ELLIPSES

[36] ARNAUDIES J-M. DELEZOIDE P. FRAYSSE H. Exercices résolus danalyse DUNOD

[37] ARNAUDIES J-M. DELEZOIDE P. FRAYSSE H. Exercices résolus dalgèbre bilinéaire et géométrie du cours deMathématiques tome 4 DUNOD

[38] ARNAUDIES J-M. FRAYSSE H. Cours deMathématiques
1. Algèbre
2. Analyse
3. Compléments danalyse
4. Algèbre bilinéaire et géométrie DUNOD

[39] ARNOLD V. Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires MIR

[40] ARNOLD V. Équations différentielles ordinaires MIR

[41] ARNOLD V. lectures on partial différentiel équations SPINGER SPINGER

[42] ARNOLD A. Mathématiques pour linformatique EDISCIENCES

[43] GUESSARIAN I. ARTIN E. Algèbre géométrique GAUTHIERVILLARS

[44] ARTIN E. Algèbre géométrique GABAY

[45] ARTINM. Algebra PRENTICE HALL PRENTICE HALL

[46] AUBIN J.P. Analyse fonctionnelle appliquée
Tome 1
Tome 2 PUF

[47] AUTEBERT J.M. Calculabilité et décidabilité MASSON

[48] AUTEBERT J.M. Théorie des langages et des automates MASSON

[49] AUDIN M. Géométrie de la licence à lagrégation BELIN

[50] AVANISSIAN V. Initiation à lanalyse fonctionnelle PUF

[51] AVEZ A. Calcul différentiel MASSON

[52] BAASE S. VAN GELDER A. Computer algorithms Introduction to design & analysis ADDISON

[53] WESLEY BADOUEL E. BOUCHERON S. DICKY A., PETIT A.

[54] SANTHAM., WEIL P., ZEITOUNM. Problèmes dinformatique fondamentale SPRINGER

[55] BACAER N. Histoires de mathématiques et de populations CASSINI

[56] BAJARD J.C. Exercices dAlgorithmique ITP

[57] BAKHVALOV N. Méthodes numériques MIR

[58] BARANGER J. Analyse numérique HERMANN

[59] BARBE Ph. LEDOUXM. Probabilité (De la licence à lagrégation) BELIN

[60] BARRETM. BENIDIRM. Stabilité des filtres et des systèmes linéaires DUNOD DUNOD

[61] BASILI B. PESKINE C. Algèbre DIDEROT, ÉDITEUR ARTS ET SCIENCES

[62] BASS J. Cours deMathématiques
Tome 1
Tome 2 MASSON

[63] BHATIA R. Matrix Analysis SPRINGER

[64] BAUER F. L. Decrypted secrets.Methods and maxims of cryptology SPRINGER

[65] BENDER C. ORSZAG S. Advanced mathematical methods for scientists and engineers MC GRAW HILL

[66] BENIDIRM. BARRETM. Stabilité des filtres et des systèmes linéaires DUNOD

[67] BENOIST J. et Alii Math L2, Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés PEARSON EDUCATION

[68] BENOIST J.SALINIER A. Exercices de calcul intégral Dunod

[69] BENZONI-GAVAGE S Calcul différentiel et équations différentielles DUNOD

[70] BERCU B. CHAFAI D. Modélisation stochastique et simulation DUNOD

[71] BERGER M. GOSTIAUX B. Géométrie différentielle ARMAND

[72] COLIN BERGER M. BERRY J-P. PANSU P. SAINT RAYMOND X. Problèmes de géométrie commentés et rédigés CÉDIC/NATHAN

[73] BERGER M. Géométrie Index
1. Action de groupes, espaces affines et projectifs
2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères
3. Convexes et polytopes, olyèdres réguliers,aires et volumes
4. Formes quadratiques,quadriques et coniques
5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, lespace des sphères CÉDIC/NATHAN

[74] BERGER M. Géométrie tome 2 NATHAN

[75] BERGER M. Géométrie vivante CASSINI

[76] BERLINE N. SABBAH C. Groupes finis, journées X-UPS 2000 EDITIONS DE LX

[77] BHATIA R. Matrix analysis 1 SPRINGER

[78] BICKEL P.J. DOKSUM K.A. Mathematical statistics PRENTICE HALL

[79] BIDEGARAY B. MOISAN L. Petits problèmes de mathématiques appliquées et de modélisation SPRINGER

[80] BIGGS NORMAN L. Discrete mathematics OXFORD SCIENCE

[81] PUBLICATIONS BLANCHARD A. Les corps non commutatifs PUF

[82] BILLINGSLEY P. Probability and measure COPYRIGHTED MATERIAL

[83] BOAS R. A primer of real functions MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA

[84] BOISSONAT J.D. YVINEC M. Géométrie algébrique EDISCIENCE

[85] BON J.L. Fiabilité des systèmes MASSON

[86] BONNANS J.F. GILBERT J.C. LEMARECHAL C. SAGASTIZABAL C. PENNEQUIN D. Optimisation numérique SPRINGER

[87] BONY J.M Cours d'analyse Ecole polytechnique

[88] BONY J.M Méthodes mathématiques pour les sciences physiques Ecole polytechnique

[89] BOUALEMH. BROUZET J.C. ELSNER B. KACZMAREK L. Mathématique L1 PEARSON EDUCATION

[90] BOURBAKI N. Éléments de Mathématique Topologie générale, chapitres V à X
Fonctions dune variable réelle, chapitres I à VII
Fonctions dune variable réelle, chapitres I à III
Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV HERMANN

[91] BOURGADE P. Annales des Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005 CASSINI

[92] BOUVIER A. RICHARD D. Groupes HERMANN

[93] BREMAUD P Introduction aux probabilités SPRINGER

[94] BREZIS H. Analyse fonctionnelle, théorie et applications MASSON

[95] BRIANE M. PAGES G. Théorie de lintégration Cours et exercices, 3ème édition VUIBERT

[96] BROUSSE P. Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A. B. B. ARMAND

[97] COLIN BRUCE J.W. GIBLIN P.J. RIPPON P.J. Microcomputers and Mathematics CAMBRIDGE

[98] CABANE R. LEBOEUF C. Algèbre linéaire
1. Espaces vectoriels , Polynômes
2. Matrices et réduction ELLIPSES

[99] CABANNES H. Cours de Mécanique générale DUNOD

[100] CALAIS J. Éléments de théorie des anneaux PUF

[101] CALAIS J. Éléments de théorie des groupes PUF

[102] CANDELPERGHER B. Calcul intégral CASSINI

[103] CANDELPERGHER B Théorie des probabilités Calvage et Mounet

[104] CALDERO P. GERMONI J Histoires hédonistes de groupes et de géométries Calvage et Mounet

[105] CARREGA J.C. Théorie des corps HERMANN

[106] CARTAN H. Calcul différentiel (1971) HERMANN

[107] CARTAN H. Cours de calcul différentiel (1977) HERMANN

[108] CARTAN H. Formes différentielles HERMANN

[109] CARTAN H. Théorie élémentaire des fonctions analytiques HERMANN

[110] CARTON O. Langages formels, calculabilité et complexité VUIBERT

[111] CASTLEMAN K.R. Digital image processing PRENTICE HALL

[112] CASTI J.L. Realty Rules : Picturing the world in mathematics I WILEY INTERSCIENCE

[113] CASTI J.L. Realty Rules : Picturing the world in mathematics II WILEY INTERSCIENCE

[114] CHABAT B. Introduction à lanalyse complexe MIR

[115] CHAMBERT-LOIR A. Algèbre corporelle EDITIONS DE LX

[116] CHAMBERT-LOIR A. FERMIGER S. MAILLOT V. Exercices de mathématiques pour lagrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée) MASSON

[117] CHAMBERT-LOIR A. FERMIGER S. Exercices de mathématiques pour lagrégation
Analyse 2
Analyse 3 MASSON

[118] CHARPENTIER E. NIKOLSKI N. Leçons de mathématiques daujourdhui Vol 1 Vol 2 Vol 3 Vol 4 ELLIPSES

[119] CHARLES J. MBEKHTAM. QUEFFELEC H. Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs ELLIPSES

[120] CHATELIN F. Valeurs propres de matrices MASSON

[121] CHILDS L. A concrete introduction to Higher Algebra SPRINGER

[122] VERLAG CHOQUET G. Cours danalyse Tome II : Topologie MASSON

[123] CHOQUET G. Lenseignement de la géométrie HERMANN

[124] CHOIMET D. QUEFFELEC H. Analyse mathématique CASSINI

[125] CHRISTOL G. PILIBOSSIAN P. YAMMINE S. Algèbre 1 Algèbre 2 ELLIPSES

[126] CIARLET P.G. Introduction à lanalyse numérique matricielle et à loptimisation MASSON

[127] COGIS O. ROBERT C. Au-delà des ponts de Knisberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes VUIBERT

[128] COHN P.M. Algebra Volume 1 JOHN WILEY

[129] COLLET H. GIRARD B. Mathématique BTS industriel NATHAN